

## **MATHEMATICS**

### **First Paper (Abstract Algebra)**

**Time Allowed : Three Hours**

**M. M. : 75**

#### **Part-A (भाग-अ) M.M.-15**

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रश्नों का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए।  
सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

#### **Part-B (भाग-ब) M.M.-15**

सभी पाँच प्रश्न कीजिये। प्रश्नों के उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

#### **Part-C (भाग-स) M.M.-45**

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिये। सभी प्रश्नों का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

#### **Part-A (भाग-अ)**

1. Define commutative ring. क्रमविनिमेय वर्लय की परिभाषा दीजिये।
2. Give definition of subfield. उपक्षेत्र की परिभाषा दीजिये।

3. Define Ideal. गुणजावली को परिभाषित कीजिये।
4. If  $f(x) = 1 + x - x^2$ ,  $g(x) = 2 + x^2 + x^3$  be two polynomial over the ring  $\mathbb{Z}$  of integers then find  $f(x) + g(x)$ .  
यदि पूर्णांकों के बलय  $\mathbb{Z}$  में  $f(x) = 1 + x - x^2$  तथा  $g(x) = 2 + x^2 + x^3$  कोई दो बहुपद हों तो  $f(x) + g(x)$  का मान ज्ञात कीजिये।
5. If  $V(F)$  be a vector space over a field  $F$ , then show that :-  
यदि  $V(F)$  एक सदिश समष्टि है, तो प्रदर्शित कीजिये :
- $$a0 = 0 \quad \forall a \in F$$
6. Define linear combination of vectors.  
सदिशों का एकघात संचय को परिभाषा लिखिये।
7. Give definition of dimension of a vector space.  
सदिश समष्टि की विमा की परिभाषा दीजिये।
8. Define isomorphism of vector spaces.  
सदिश समष्टियों को तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिये।
9. State Cayley-Hamilton theorem. कैली-हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिये।
10. Define Diagonalizable Matrix. विकर्णीय मैट्रिक्स की परिभाषा लिखिये।

### Part-B (भाग-ब)

11. Show that if a ring  $R$  is without zero divisors if the cancellation law holds in  $R$ . प्रदर्शित कीजिये कि कोई बलय  $R$  शून्य भाजक रहित है यदि ( $\Leftrightarrow$ )  $R$  में निरसन नियम सत्य है।
12. Show that the intersection of two ideals of a ring is again an ideal of the ring. प्रदर्शित कीजिये कि किसी बलय की दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी उस बलय की गुणजावली होती है।
13. Prove that every non-empty subset of a LI set of vectors is also LI.  
सिद्ध कीजिये कि सदिशों के LI समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी LI होता है।
14. For any matrix  $A$  over the field  $F$ , Prove that :  
क्षेत्र  $F$  पर किसी मैट्रिक्स  $A$  के लिए सिद्ध कीजिये :

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^\top)$$

15. Diagonalise the following symmetric matrix :  
निम्नलिखित सममित मैट्रिक्स को विकर्णित कीजिये:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

### Part-C (भाग-स)

### Unit-I(इकाई-1)

16. (a) Show that the necessary and sufficient conditions for a non-void subset  $S$  of a ring  $R$  to be a subring of  $R$  are :

प्रदर्शित कीजिये कि किसी वलय  $R$  के एक अरिक्त उपसमुच्चय  $S$  के लिए  $R$  का उपलव्य हेतु आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है

$$a \in S, b \in S \Rightarrow a - b, ab \in S.$$

- (b) Prove that every homomorphic image of a ring  $R$  is isomorphic to some quotient ring.

सिद्ध कीजिये कि किसी वलय  $R$  का प्रत्येक समाकारी प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होता है।

17. (a) Show that every field is a Euclidean ring.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक क्षेत्र युक्लिडीग रिंग है।

- (b) Show that the set  $R[x]$  of all polynomials over an arbitrary ring  $(R, +, \cdot)$  is a ring with respect to addition and multiplication of polynomials.

प्रदर्शित कीजिये कि किसी स्वेच्छ वलय  $(R, +, \cdot)$  पर सभी बहुपदों का समुच्चय  $R[x]$  बहुपदों के योग एवं गुणन के लिए एक वलय होता है।

### Unit-II(इकाई-2)

18. (a) Show that the following set  $V$  of matrices is vector space over the field  $R$  of real numbers with respect to matrix addition and matrix scalar multiplication where ;

सिद्ध कीजिये कि मैट्रिसेज का निम्न समुच्च  $V$  मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र  $R$  पर एक सदिश समष्टि है:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$$

- (b) Prove that the set  $W = \{(a,b,0) : a, b \in R\}$  is a subspace of the vector space  $V_3(F)$ . सिद्ध कीजिये कि समुच्चय  $W = \{(a,b,0) : a, b \in R\}$  सदिश समष्टि  $V_3(F)$  की एक उपसमष्टि है।

19. (a) Show that the set  $S = \{(1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\}$  forms a basis of the vector space  $V_3(R)$ .

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय  $S = \{(1,0,0); (1,1,0); (1,1,1)\}$  सदिश समष्टि  $V^3(R)$  का एक आधार निर्मित करता है?

- (b) State the prove Sylvester's law of Nullity.

सिल्वेस्टर का शून्यता नियम का कथन कर सिद्ध कीजिये।

### Unit-III(इकाई-3)

20. (a) Let  $\text{Dim } V(F) = n$  and if  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $B^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  are the basis and dual basis sets respectively of  $V$ . then

माना  $\text{Dim } V(F) = n$  तथा  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ,  $B^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$   $V$  के क्रमशः आधार तथा द्वैती आधार हों, तो सिद्ध कीजिये:

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n = 1.$$

- (b) Show that : प्रदर्शित कीजिये।

$$\dim A(W) = \dim V - \dim W$$

Where  $W$  be a subspace of  $V(F)$ .

जहाँ  $W$ ,  $V(F)$  की उपसमष्टि है।

- 21.(a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix  $A$  :  
निम्न मैट्रिक्स  $A$  के आइगेनमान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिये:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

- (b) Show that similar matrices have the same eigenvalues.  
प्रदर्शित कीजिये कि समयप मैट्रिशेज के आइगनमान समान होते हैं।