
B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2016
MATHEMATICS
Paper- I : Abstract Algebra

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ (अनिवार्य)

Part-A (Compulsory)

[Marks : 10]

भाग- अ (अनिवार्य)

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-B (Compulsory)

[Marks : 10]

भाग- ब (अनिवार्य)

सभी पांच प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-C (भाग- स)

[Marks : 30]

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-A (Compulsory)

[Marks : 10]

भाग-अ (अनिवार्य)

1. Define field. क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।
2. Define simple ring. सरल वलय की परिभाषा दीजिये।
3. Give definition of unique factorization domain. अद्वितीय गुणनखण्ड प्रान्त की परिभाषा दीजिये।
4. Define vector space. सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिये।
5. Write definition of linear span. एकघातीय विस्तृति की परिभाषा लिखिये।
6. Define dimension of a vector space. सदिश समष्टि की विमा को परिभाषित कीजिए।
7. Write matrix representation of linear transformation. रैखिक रूपान्तरण का मैट्रिक्स निरूपण लिखिये।
8. Define dual space. द्वैती समष्टि को परिभाषित कीजिये।
9. Find eigenvalues of the following matrix A :
निम्नलिखित मैट्रिक्स के आइगेनमान ज्ञात कीजिये :
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
10. Define diagonalization. विकर्ण को परिभाषित कीजिए।

Part-B (Compulsory)

भाग-ब (अनिवार्य)

11. Show that the intersection of two subrings is again subring.
प्रदर्शित कीजिये कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।
12. If $f_1(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3, f_2(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$ are two polynomials over the ring $(Z_6, +, +, x_6)$; then find $f_1(x) + f_2(x)$

यदि वलय (Z_6 , $+$, \cdot , $+ x6$); में $f_1(x) = 5 + 4x + 3x^2 + 2x^3$, तथा $f_2(x) = 1 + 4x + 5x^2 + x^3$ कोई दो बहुपद हैं, तो $f_1(x) + f_2(x)$ ज्ञात कीजिये।

13. Prove that any superset of a LD set of vectors is also LD.
सिद्ध कीजिये कि सदिशों के LD समुच्चय का अधिसमुच्चय भी LD होता है।
14. Show that kernel of a liner transformation in a subspace.
प्रदर्शित कीजिये कि किसी रैखिक प्रतिचित्रण की अष्टि एक उपसमष्टि होती है।
15. For any matrix A over the field F show that:
क्षेत्र F पर किसी मैट्रिक्स A के लिये प्रदर्शित कीजिये :

$$\text{Rank}(A) = \text{Rank}(A^T)$$

Part-C (Compulsory)

भाग-स (अनिवार्य)

UNIT-I (इकाई-I)

- 16.(a) Show that a ring R is without zero divisors if the cancellation law holds in R . प्रदर्शित कीजिये कि वलय R शून्य भाजक रहित है यदि R में निरसन नियम सत्य है।
- (b) Prove that the necessary and sufficient conditions for a non-void subsec S of a field F to be a subfield of F are: सिद्ध कीजिये कि किसी क्षेत्र F के एक अरिक्त समुच्चय S के लिए F का उपक्षेत्र होने हेतु आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबन्ध है :
 - (i) $a \in S, b \in S \Rightarrow a \cdot b \in S$
 - (ii) $a \in S, b(=0) \in S \Rightarrow ab^{-1} \in S$

Or (अथवा)

- (a) Show that every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient ring. प्रदर्शित कीजियें कि किसी वलय R का प्रत्येक समाकारी प्रतिविम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होता है।
- (b) If R is a commulative ring then show that polynomial ring $R[x]$ is also commulative. यदि R एक क्रमविनिमेय वलय है तो प्रदर्शित कीजिये कि बहुपद वलय $R[x]$ भी क्रमविनिमेय वलय होता है।

UNIT-II (इकाई-II)

- 17.(a) Prove that union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space $V(F)$ is a subspace if $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$. सिद्ध कीजिये कि यदि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$.
- (b) Show that the linear sum of two subspaces of a vector space is also a subspace. प्रदर्शित कीजिये कि किसी सदिश समष्टि को दो उपसमष्टियों का एकघातीय योग भी एक उपसमष्टि होती है।

Or (अथवा)

- (a) Prove that the set $S \{(1, 2, 1); (2, 1, 0); (1, -1, 2)\}$ forms a basis of the vector space $V_3(\mathbb{R})$. सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S \{(1, 2, 1); (2, 1, 0); (1, -1, 2)\}$ सदिश समष्टि $V_3(\mathbb{R})$ का एक आधार बनाता है।
- (b) State and prove Sylvester law of nullity.
सिल्वेस्टर का शून्यता का नियम का कथन कर सिद्ध कीजिये।

UNIT-III (इकाई-III)

- 18.(a) Let $\dim V(F) = n$ and if $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ and $B^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ are the basis and dual basis sets respectively of V then prove that :
 $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n = I_v$ (Identify mapping from V to V)
माना $\dim V(F) = n$ तथा यदि $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $B^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ V के क्रमशः आधार पर द्वैती आधार हों तो सिद्ध कीजिये :
 $x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n = I_v$ (Identify mapping from V to V)
- (b) If W is subspace of $V(F)$, then prove that :
यदि W सदिश समष्टि $V(F)$ की उपसमष्टि हो तो सिद्ध कीजिये :
 $a(A(W)) = W = W^{(0)}$

Or (अथवा)

- (a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix A :
निम्न मैट्रिक्स A के आइगेनमान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिये :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Diagonalize the following matrix :

निम्न सममित मैट्रिक्स को विकर्णित कीजिये :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$