

MATHEMATICS

Paper- II : Analysis

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Define positive class of a field.
किसी फील्ड के धनात्मक वर्ग की परिभाषा दीजिये।
2. Write definition of limit point of set.
एक समुच्चय के सीमा बिन्दु की परिभाषा लिखिये।
3. What is diameter of sub-set of metric space?

किसी दूरिक समष्टि के उपसमुच्चय का व्यास क्या होता है?

4. Write definition of complete metric space with and example.

पूर्ण दूरिक समष्टि की परिभाषा उदाहरण सहित लिखिये।

5. Define sub-set of first category of a metric space with one example.

एक उदाहरण सहित दूरिक समष्टि के प्रथम संवर्ग के उप-समुच्चय को परिभाषित कीजिये।

6. Prove that every contracting mapping is continuous.

सिद्ध कीजिये प्रत्येक संकुचन प्रतिचित्रण सतत होता है।

7. Define compact metric space. संहत दूरिक समष्टि की परिभाषा लिखिये।

8. Write polar form of Cauchy-Riemann equation.

कोशी-रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप लिखिये।

9. Write necessary and sufficient condition of a mapping to be conformal in a domain D. किसी प्रतिचित्रण के किसी प्रान्त D में अनुकोण प्रतिचित्रण होने हेतु आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबिम्ब लिखिये।

10. Define bilinear transformation. द्विरेखीय समानतास्त्रण की परिभाषा लिखिये।

PART-B

भाग-ब

11. If p is prime number, then prove that \sqrt{p} is not rational number.

यदि p एक अभाज्य संख्या हो तो सिद्ध कीजिये \sqrt{p} एक परिमेय संख्या नहीं होगी।

12. Prove that a sub-set of a metric space is closed if its complement is open.

सिद्ध कीजिये किसी दूरिक समष्टि का एक उप-समुच्चय संवृत्त है यदि इसका पूरक विवृत हो।

13. Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.

सिद्ध कीजिये कि दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम-परिबद्ध होता है।

14. For any complex number z prove that :

किसी सम्मिश्र संख्या z हेतु सिद्ध कीजिये :

$$|z| \geq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)|$$

\sqrt{z}

15. Show that the function $f(z) = z^3$ is an analytic function find its derivative. प्रदर्शित कीजिये कि फलन $f(z) = z^3$ विश्लेषिक है। इसका अवकलज ज्ञात कीजिये।

PART-C (भाग-स)

UNIT-I (इकाई-I)

- 16.(a) Prove that between any two different real numbers there lie an infinite number of rational numbers. सिद्ध कीजिये कि दो भिन्न वास्तविक संख्याओं

के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

- (b) Construct Cantor ternary set. केन्टर त्रिभागीय समुच्चय का निर्माण कीजिये।

Or (अथवा)

- (a) Let the mapping $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by :

$$d(x, y) = |x - y| \quad x, y \in \mathbb{R}$$

then d is a metric for \mathbb{R} .

यदि एक प्रतिचित्रण $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ में निम्न रूप से परिभाषित है :

$$d(x, y) = |x - y| \quad x, y \in \mathbb{R}$$

तो सिद्ध कीजिये d , \mathbb{R} में एक दूरिक है।

- (b) Prove that a subset of a metric space is closed if it contains all of its limit points. सिद्ध कीजिये किसी दूरिक समष्टि का एक उप-समुच्चय संवृत्त है यदि और केवल यदि वह अपने सभी सीमा बिन्दुओं को अन्तर्विष्ट करता है।

UNIT-II (इकाई-II)

- 17.(a) Prove that usual metric space (\mathbb{R}, d) is a complete metric space,

सिद्ध कीजिये कि साधारण दूरिक समष्टि (\mathbb{R}, d) एक पूर्ण समष्टि है।

- (b) State and prove Cantors Interpolation theorem for complete metric space. पूर्ण दूरिक समष्टि हेतु केन्टर सर्वनिष्ट प्रमेय कथन सहित सिद्ध कीजिये।

Or (अथवा)

- (a) If $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x/3$, then prove that f is a contraction. यदि $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x/3$ से परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिये f संकृतन होता है।

- (b) Let (X, d) be a complete metric space and let f be a contracting mapping on X , then there exists a unique x in X such that $f(x) = x$. माना कि (X, d) एक पूर्ण दूरिक समष्टि है एवं f , X पर एक संकृतित फलन है तो X में अद्वितीय x इस प्रकार विद्यमान है कि $f(x) = x$

UNIT-III (इकाई-III)

- 18.(a) Show that the function $f(z) = \sqrt{|xy|}$ is not analytic at the origin, although the Cauchy-Riemann equation are satisfied at that point.

सिद्ध कीजिये फलन $f(z) = \sqrt{|xy|}$ मूल बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है यद्यपि मूल बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती है।

- (b) Prove that following functions is harmonic also find its conjugate harmonic : सिद्ध कीजिये निम्न फलन प्रसंवादी है। इसका संयुग्मी प्रसंवादी भी ज्ञात कीजिये :

$$u(x, y) = 1/2 \log(x^2 + y^2)$$

Or (अथवा)

- (a) If $f(z)$, is an analytic function of z in D of z -plane and $f'(z) \neq 0$

- (b) in D then mapping $w = f(z)$ is conformal at all points of D .
यदि $f(z)$, z -समतल के प्रान्त D में z का एक वैश्लेषिक फलन है तथा D में $f'(z) \neq 0$ तो प्रतिचित्रण $w = f(z)$ के D बिन्दुओं पर अनुकोण प्रतिचित्रण है।
Prove that every bilinear transformation maps circles or straight lines into circles or straight lines. सिद्ध कीजिये प्रत्येक द्विरेखीय रूपान्तरण वृत्त या सरल रेखा को वृत्त या सरल रेखा में प्रतिचित्रित करता है।