

# MATHEMATICS

## Paper- III (a) : Discrete Mathematics

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

### Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

#### भाग- अ ( अनिवार्य )

1. Draw a Hasse diagram of the set  $D_{30}$  of positive intergration divisors of 30. 30 के धन पूर्णक भाजकों के समुच्चय  $D_{30}$  को हैस चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिये।
2. Define partition of a set. नियमित भाषा की परिभाषा दीजिये।
3. Define fundamental principle of counting. नियमित भाषा की परिभाषा दीजिये।
4. Define fundamental principle of counting. गणना के मूलभूत सिद्धान्तों की परिभाषा दीजिये।
5. Define complementary combination. पूरक संचय की परिभाषा दीजिये।
6. Draw flow chart of path and circuit. पथ तथा परिपथ का प्रवाह सचित्र खींचिये।
7. Define radius and diameter of a tree. वृक्ष के अर्धव्यास तथा व्यास की परिभाषा दीजिये।
8. Define equivalent machine. तुल्य मशीनों को परिभाषित कीजिये।
9. Define order relation in Boolean algebra. बूलीय बीजातली के क्रम सम्बन्ध की परिभाषा दीजिये।
10. Define fallacy and give an example. हेत्वाभास को परिभाषित कीजिये तथा एक उदाहरण भी दीजिये।

### Part-B (Compulsory)

#### भाग-ब (अनिवार्य)

11. Let  $S = \{(a, b) : 1 + ab > 0; a, b \in R\}$  be a relation on the set  $R$  of real numbers. Then explain whether  $S$  is reflexive symmetric or transitive. माना वास्तविक के समुच्चय  $R$  पर परिभाषित कोई सम्बन्ध  $S = \{(a, b) : 1 + ab > 0; a, b \in R\}$  है तो बताइये कि  $S$  सम्बन्ध स्वतुल्य, सममित अथवा संक्रामक है या नहीं।

12. The probability that a teacher will give an unannounced test during

any class meeting is  $\frac{1}{5}$ . If the student is absent twice, what is the probability that he will miss at least one test?

एक अध्यापक की कक्षा में बिना सूचना परीक्षा लेने की प्रायिकता  $\frac{1}{5}$  है। यदि एक विद्यार्थी दो बार अनुपस्थित रहे तो इस बात की प्रायिकता क्या होगी कि वह कम से कम एक परीक्षा नहीं दे सकेगा?

13. A plane simple graph has 30 vertices each of degree 4. In how many regions can this graph be partitioned?

किसी समतलीय सरल ग्राफ में 30 शीर्ष हैं तथा प्रत्येक शीर्ष की कोटि 4 है। समतलीय ग्राफ को कितनी पार्श्वों (क्षेत्रों) में विभाजित किया जा सकता है?

14. Prove that language  $L = \{a^r = r = n^2; n \geq 1\}$  is not a finite state language. सिद्ध कीजिये कि भाषा  $L = \{a^r = r = n^2; n \geq 1\}$  एक परिमित अवस्था भाषा नहीं है।

15. Show that the compound statement  $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$  is a contraction. प्रदर्शित कीजिये कि मिश्र प्रकथन  $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$  एक विरोधाभास है।

### Part-C (भाग-स)

#### Unit-I (इकाई-I)

16. (a) Define partial order relation and equivalence class. Show that any two equivalence classes are either disjoint or equal.

आंशिक क्रम सम्बन्ध तथा तुल्यता वर्ग परिभाषित कीजिये। सिद्ध कीजिये कि दो तुल्यता वर्ग या तो असंयुक्त होते हैं या परस्पर समान।

(b) Prove that the number of derangements of a set with n-element is:

$$D_n = n \left[ 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} \right]$$

सिद्ध कीजिये कि n-अवयवों के समुच्चय के कुल अपविन्यासों की संख्या होती है:

$$D_n = n \left[ 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n} \right]$$

Or (अथवा)

(a) Let  $G = (V, T, P, S)$ , where  $V = \{S, a, b\}$   $T = \{a, b\}$ ,  $S$  is the initial

symbol and  $p = \{S \rightarrow aaS, S \rightarrow a, S \rightarrow b\}$ . Find the language  $L(G)$  of the grammar  $G$ .

माना  $G = (V, T, P, S)$  जहाँ  $V = \{S, a, b\}$ ,  $T = \{a, b\}$ ,  $S$  प्रारम्भिक प्रतीक तथा व्याकरण  $p = \{S \rightarrow aaS, S \rightarrow a, S \rightarrow b\}$  की भाषा  $G$  ज्ञात कीजिये।

- (d) Construct a grammar for the following language :

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 1, i \neq j\}$$

निम्न भाषा के लिए व्याकरण की रचना कीजिये :

$$L = \{a^i b^j \mid i, j \geq 1, i \neq j\}$$

### Unit-II (इकाई-II)

17. (a) In how many ways the digits 0, 1, 2, ..., 9 can be arranged so that :

(i) 0 and 1 are together?

(ii) 0 and 1 are together and in the order 01.

0, 1, 2, ..., 9 को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है कि :

(i) 0 तथा 1 साथ-साथ रहें?

(ii) 0 तथा 1 क्रम 01 में ही रहें?

- (b) Define complete bipartite graph. Show that in a complete bipartite

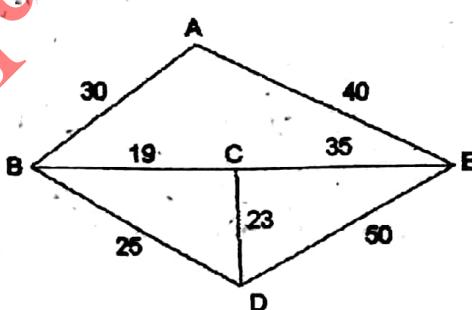
graph with  $n$ -vertices the total number of edges cannot exceed  $\frac{n^2}{4}$ .

पूर्ण द्विखण्डी ग्राफ को परिभासित कीजिये। सिद्ध कीजिये कि किसी पूर्ण द्विखण्डी

ग्राफ में  $n$ -शीर्ष हों तो इसमें  $\frac{n^2}{4}$  से अधिक कोरे नहीं हो सकती।

### Or (अथवा)

- (a) Solve the travelling sales person problem for the following graph:  
निम्नांकित ग्राफ के लिए चल विक्रेता समस्या को हल कीजिये :



- (b) Define the following with examples :

- (i) Hamiltonian cycle and path
- (ii) Eulerian graph
- (iii) Rooted tree

---

(iv) Spanning tree

निम्नलिखित को उदाहरणों सहित परिभाषित कीजिये :

- (i) हेमिल्टोनियन चक्र तथा पथ
- (ii) आयलर ग्राफ
- (iii) समूल वृक्ष
- (iv) जनक वृक्ष

### Unit-III (इकाई-III)

18. (a) Define and explain Turing Machine as Finite State Machines.  
ट्रूरिंग मशीन की परिभाषा देते हुए, परिसित अवस्था मशीन के रूप में समझाइये।
- (b) Define proposition and tautology. Also state and prove De-Morgan's Law for propositions.  
साध्य तथा पुनरुक्ति को परिभाषित कीजिये तथा द-मॉर्गन नियम का कथन लिखते हुए सिद्ध कीजिये।

#### Or (अथवा)

- (a) Prove that in a Boolean algebra B, for any two elements  $a, b \in B$ ,  $a + b$  is lub and  $a.b$  is glb of  $\{a, b\}$ .  
सिद्ध कीजिये कि बूलीय बीजगणित B में किन्हीं दो अवयवों  $a, b \in B$ , के  $a + b$  उच्चक तथा  $a.b$  निम्नक होता है।
- (b) Express the Boolean function in their conjunction normal form:  
 $F(x, y, z) = [x + (x' + y)'] [x + (y' z')]$   
बूलीय फलन को संयोजनीय प्रसामान्य रूप में व्यक्त कीजिये :  
 $F(x, y, z) = [x + (x' + y)'] [x + (y' z')]$