

MATHEMATICS
First Paper : Higher Algebra

Time allowed : Three hours

**Maximum Marks 75 for
Science 66 for Arts.**

Part - A (Compulsory)

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य हैं। प्रश्नों के उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part - B (Compulsory)

सभी पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्नों के उत्तर 100 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part - C (Compulsory)

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिए। प्रश्नों के उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part - A

1. Prove Pascal's Rule: पास्कल नियम सिद्ध कीजिये:

$$\begin{matrix} n & + & n \\ & c & c \\ & r & r-1 & r \end{matrix} = n+1 \quad 1 \leq r \leq n$$

2. Prove that: सिद्ध कीजिये:

$$F_0 F_1 \cdots F_{n-1} = F_{n-2} \text{ where जहाँ } F_n = 2^{2^n} + 1$$

3. Solve: हल कीजिये:

$$9x \equiv 31 \pmod{30}$$

4. Define Euler's ϕ - Function.

ऑयलर ϕ -फलन को परिभाषित कीजिए।

5. Show that: दिखलाइये कि:

$$P_n q_{n-2} \sim P_{n-2} q_2 = a_n$$

6. Define complete Quotient. पूर्ण भागफल को परिभाषित कीजिए।

7. Find the situation of the roots of the equation.

समीकरण के मूलों की स्थिति ज्ञात कीजिए।

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

8. Sum the series: योग ज्ञात कीजिए:-

If यदि $x < 1$,

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + \text{to } \infty$$

9. Remove the fractional coefficient of the following equation-
निम्न समीकरण के भिन्नात्मक गुणांकों का निष्कासन कीजिए-

$$x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 = 0$$

10. By Vedic method solve: वैदिक विधि द्वारा हल कीजिए:

$$2x + 3y = 8$$

$$4x + 5y = 14$$

Part - B

11. Find the gcd of 275 and 200 and express it in the form $275x + 200y$.
275 तथा 200 का gcd ज्ञात कीजिए तथा इसे $275x + 200y$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

12. Solve the system of linear congruence: रैखिक समशेष निकाय को हल कीजिए:
 $x \equiv 2 \pmod{3}$

$$x \equiv 3 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{7}$$

13. Convert $\frac{28}{23}$ into a simple continued fraction and find the successive convergents.

$\frac{28}{23}$ को सरल वितत भिन्न में रूपान्तरित कीजिए और इसके उत्तरोत्तर अभिसरक ज्ञात कीजिए।

14. Solve the equation $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$, the roots being in G.P.

समीकरण $27x^3 + 42x^2 - 28x - 8 = 0$, को हल कीजिए जबकि मूल गुणोत्तर श्रेणी में है।

15. If the equation $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ has three equal roots, show that each of them is equal to:

$$\frac{(6c - ab)}{(3a^2 - 8b)}$$

given that $3a^2 - 8b \neq 0$.

यदि समीकरण $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ के तीन मूल समान हो तो दिखलाइये कि प्रत्येक मूल का मान है—

$$\frac{(6c - ab)}{(3a^2 - 8b)}$$

दिया है कि $3a^2 - 8b \neq 0$.

Parts - C

Unit - I

- 16 (a) If n is even, show that $n(n^2 + 20)$ is divisible by 48.

यदि n सम है तो, दिखलाइये $n(n^2 + 20)$, 48 से भाज्य है।

- (b) Prove that (सिद्ध कीजिए)

$$\sum_{r=0}^{n-1} \left[\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} \right] = [2^n - 1]$$

OR

- (a) Two integers are congruent modulo m iff they leave the same remainder when divided by m and conversely.

दो पूर्णक समशेष मोड्यूलो m हैं यदि उनमें m से भाग देने पर समान शेषफल प्राप्त होते हैं तथा विलोमतः भी।

- (b) Solve Diophantine equation:

$$x + 2y + 3z = 1$$

डायोफेन्टाइन समीकरण $x + 2y + 3z = 1$ को हल कीजिए।

Unit - II

17. (a) Calculate the successive convergents of the following:

निम्न के उत्तरोत्तर अभिसरक ज्ञात कीजिए:

$$2 + \frac{1}{5+} \frac{1}{1+} \frac{1}{2+} \frac{1}{9+} \frac{1}{3+} \dots \dots$$

- (b) Find the n^{th} term and sum to n terms of the following series:

निम्न श्रेणी का n वां पद तथा n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

$$1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + 66x^4 + 212x^5 + \dots$$

OR

- (a) Evaluate - मान ज्ञात कीजिए -

$$x = 4 + \frac{1}{7+1} \frac{1}{2+3} \frac{1}{3+1} \frac{1}{2+3} \dots \infty$$

- (b) Find the n^{th} term and sum to n terms of the following series-
निम्न श्रेणी का n वां पद या n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

$$-\frac{3}{2} + 2 + 0 + 8 + \dots$$

Unit - III

18. (a) Find the condition that the cubic:

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0, \text{ should have its roots in H.P.}$$

क्यूबिक की वह शर्त बताइए जिसमें उसकी रूट एच.पी. में हो।

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0, \text{ should have its roots in H.P.}$$

- (b) Solve the equation $x^3 - 15x - 126 = 0$, by Cardan's method.

समीकरण $x^3 - 15x - 126 = 0$, को कार्डन विधि से हल कीजिए।

OR

- (a) If α, β, γ be the roots of the cubic $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, find the value of the following symmetric functions:

यदि α, β, γ समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल हैं तो निम्न सममित फलनों के मान ज्ञात कीजिए :

$$(i) \sum \frac{1}{\alpha^2 \beta^2}$$

$$(ii) \sum \left(\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta \gamma} \right)$$

- (b) Solve the following system of equations by Vedic Method.

निम्न समीकरण निकाय का हल वैदिक विधि से ज्ञात कीजिये।

$$4x - 2y + 3z = 8$$

$$2x - 3y - z = 1$$

$$3x + 2y - z = 3$$