MATHEMATICS

First Paper : Abstract Aigebra

Time allowed : Three hours **Maximum Marks 75 for Science 66 for Arts.**

Parts - A (Compulsory)

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य हैं। प्रश्नों के उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Parts - B (Compulsory)

सभी पाँच प्रश्न कीजिए। प्रश्नों के उत्तर 100 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Parts - C

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिए। प्रश्नों के उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Parts - A

1. Define Ring with Zero-divisors. शून्य के भाजकों सहित वलय की परिभाषा दीजिये।
2. Write the definition of Ideal. गुणजावली की परिभाषा लिखिये।
3. Define Polynomial over a Ring. वलय पर बहुपद को परिभाषित कीजिये।
4. Define Basis of a Vector Space. सदिश समष्टि का आधार परिभाषित कीजिए।
5. Write the definition of Linear Mapping. रैखिक प्रतिचित्रण की परिभाषा लिखिये।
6. Define Isomorphism of Vector Spaces.
   सदिश समष्टियों की तुल्यकारिता की परिभाषा दीजिये।
7. Define characteristic Polynomial. अभिलाक्षणिक बहुपद को परिभाषित कीजिये।
8. Write the definition of similar Matrices. समरूप मैट्रिसेज की परिभाषा लिखिये।
9. Define Diagonalizable Operator. विकर्णीय संकारक की परिभाषा दीजिये।
10. State Cayley-Hamilton Theorem. कैली–हेमिल्टन प्रमेय का कथन लिखिये।

Parts - B

11. Prove that the set S of all matrices of the form $\begin{bmatrix} a & b \\ o & c \end{bmatrix}$. a, b, c $\in$ Z forms a subring of the ring R of all 2×2 matrices over the set of integers.

    सिद्ध कीजिए कि $\begin{bmatrix} a & b \\ o & c \end{bmatrix}$, a, b, c $\in$ Z प्रकार के सभी मैट्रिसेज का समुच्चय S, पूर्णांकों पर 2×2 कोटि के सभी मैट्रिसेज के वलय R का एक उपवलय है।

12. If a, b, c are elecments of a Euclidean ring R such that (a, b) = 1 and a | bc then show that a/c.

http://questionpaperesult.com/

Scanned by CamScanner

यदि a, b, c एक यूक्लिडीय रिंग R के ऐसे अवयव हो कि (a, b) = 1 तथा a | bc तो सिद्ध कीजिये कि a/c

13. Show that the following vectors of $V_3(R)$ are linearly dependent:
सिद्ध कीजिए कि $V_3(R)$ के निम्न सदिश एकघाततः परतन्त्र है:

$$\alpha_1 = (1,3,2); \alpha_2 = (1,-7,-8); \alpha_3 = (2,1,-1)$$

14. If t is a linear mapping from the vector space V(F) to V(F), then show that:
यदि सदिश समष्टि में एक प्रतिचित्रण है तो सिद्ध कीजिये कि:

$$t(-\alpha) = -t(\alpha), \forall \alpha \in V$$

15. Find the characteristic equation of the following matrix A:
निम्न मैट्रिक्स A की अभिलाक्षणिक समीकरण ज्ञात कीजिये।

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Parts - C
Unit - I

16. (a) Define Integral Domain. Also prove that the ring $(Z_p = \{0,1,2....,(p-1)\}, +_p x_p)$ is an integral domain if and only if p is prime.
पूर्णांकीय प्रांत को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि वलय $(Z_p = \{0,1,2....,(p-1)\}, +_p x_p)$ एक पूर्णांकीय प्रांत होता है यदि और केवल यदि P अभाज्य है।

(b) Prove that the set $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in Q\}$ is a subfield of the field (R, +,x) of real numbers.
सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a,b \in Q\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र (R, +,x) का एक उपक्षेत्र है।

OR

(a) If I_1 and I_2 be two ideals of a ring R, then prove that $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 / a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ is an ideal of R containing both I_1 and I_2.
यदि I_1 और I_2 किसी वलय R की दो गुणजावलियाँ हों तो सिद्ध कीजिये कि $I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 / a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$ भी R की एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 और I_2 दोनों अन्तर्विष्ट हैं।

(b) Let R be a Euclidean ring a, b are non-zero elements in R, then prove

http://questionpaperesult.com/

Scanned by CamScanner

that a and b have greatest common-divisor d which can be expressed in the form $d = \lambda a + \mu b$ for some $\lambda, \mu \in R$.

माना R यूक्लिडीय वलय है, a, b शून्येत्तर $\in R$ हों तो सिद्ध कीजिये कि a तथा b का महत्तम सार्वभाजक d है जिसे किन्हीं $\lambda, \mu \in R$ के लिए $d = \lambda a + \mu b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

Unit - II

17. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for a non-void subset W of a vector apace V(F) to be a subspace of V(F) is :

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि V(F) के एक अरिक्त उपसमुच्चय W के लिए V(F) की एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है :

$a, b \in F and \alpha, \beta \in W \Rightarrow (a\alpha + b\beta) \in W$

(b) Define Linear sum of two Subspaces. Also prove that the linear sum of two subspaces of a vector space is also a subspace.

दो उपसमष्टियों का एकघातीय योग परिभाषित कीजिये। सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि की दो उपसमष्टियों का एकघातीय योग भी एक उपसमष्टि होती है।

OR

(a) Show that S = {(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)} is a basis for the space $V_3(R)$. Also find the coordinates of $a = (3, 1, -4) \in V_3(R)$ relative to the basis.

सिद्ध कीजिए कि S = {(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)} समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार है। इस आधार के सापेक्ष $a = (3, 1, -4) \in V_3(R)$ के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिये।

(b) Prove that every n-dimensional vector space V(F) is isomorphic to $V_n(F) i.e. V(F) \cong V_n(F)$.

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक n-विमीय सदिश समष्टि V(F), $V_n(F)$ के तुल्यकारी होता है अर्थात $V(F) \cong V_n(F)$.

Unit - III

18. (a) Calculate : $2A^5 - 3A^4 + A^2 - 4I$.

where $a = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

गणना कीजिये : $2A^5 - 3A^4 + A^2 - 4I$.

जहाँ $a = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(b) Prove the following properties of similar matrices:

http://questionpaperesult.com/

Scanned by CamScanner

(i) Similarity is an equivalence relation.

(ii) Similar matrices have the same eigenvalues.

समरूप मैट्रिसेज के निम्न प्रगुण सिद्ध कीजिये :

(i) समरूपता एक तुल्यता सम्बन्ध होता है :

(ii) समरूप मैट्रिसेज के आइगेनमान समान होते हैं।

OR

(a) State and prove Cayley-Hamilton theorem.

कैली–हेमिल्टन प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।

(b) Prove that the $n \times n$ matrix A over the field F is diagonalizable if and only if A has n-linear independent eigenvectors in $V^n(F)$.

सिद्ध कीजिये कि क्षेत्र F पर कोई n-वर्ग मैट्रिक्स A विकर्णीय है यदि और केवल यदि सदिश समष्टि $V^n(F)$ में A के n-आइगेन सदिश एकघाततः स्वतन्त्र हों।

http://questionpaperesult.com/

Scanned by CamScanner