

माना $\dim V(F) = n$ तथा $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$, $B^* = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ V के क्रमशः आधार तथा द्वैती आधार हों, तो सिद्ध कीजिये:

$$x_1 b_1 + x_2 b_2 + \dots + x_n b_n = 1_v$$

(b) Show that : प्रदर्शित कीजिये।

$$\dim A(W) = \dim V - \dim W$$

Where W be a subspace of $V(F)$.

जहाँ W , $V(F)$ की उपसमष्टि है।

21.(a) Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix A :
निम्न मैट्रिक्स A के आइगेनमान तथा संगत आइगेन सदिश ज्ञात कीजिये:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) Show that similar matrices have the same eigenvalues.

प्रदर्शित कीजिये कि समरूप मैट्रिसेज के आइगेनमान समान होते हैं।

MATHEMATICS

Second Paper (Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75

PART-A (भाग-अ)

1. (i) Define derived set. Write the derived set of Q .
व्युत्पन्न समुच्चय की परिभाषा दीजिये। Q का व्युत्पन्न समुच्चय लिखिये।
- (ii) State Heine-Borel theorem. Give an example of a compact set.
हेने-बोरेल प्रमेय का कथन लिखिये। एक संहत समुच्चय का उदाहरण दीजिये।
- (iii) Define Euclidean metric for R^2 .
 R^2 में युक्लीडियन दूरीक को परिभाषित कीजिये।
- (iv) If d is the usual metric in the set $X = [0, 1]$, then determine closed ball $S_{\frac{4}{35}} \left[\frac{1}{35} \right]$. यदि d समुच्चय $X = [0, 1]$ में साधारण दूरीक है तब संवृत्त गोलक $S_{\frac{4}{35}} \left[\frac{1}{35} \right]$ का निर्माण कीजिए।
- (v) Define a Cauchy sequence in a metric space (X, d) .
दूरीक समष्टि (X, d) में एक कॉशी अनुक्रम की परिभाषित दीजिये।
- (vi) Define limit point of a subset A of a metric space (X, d) .
दूरीक समष्टि (X, d) के एक उपसमुच्चय A के सीमा बिन्दु की परिभाषा दीजिये।
- (vii) Define a complete metric space. Also give its one example.

- एक पूर्ण दूरीक समष्टि की परिभाषा दीजिये। इसका एक उदाहरण भी दीजिये।
- (viii) Write the equation of a straight line joining the points Z_1, Z_2 in the complex-plane. Also write its general form.
 'सम्मिश्र तल में दो बिन्दुओं' Z_1 व Z_2 को मिलाने वाली रेखा का समीकरण लिखिये। इसका सामान्य रूप भी लिखिये।
- (ix) Write the points in the z -plane where the mapping given by $f(z) = z^4 - z^2$ ceases to be conformal. z -समतल में वे बिन्दु ज्ञात कीजिये, जहाँ प्रतिचित्रण $f(z) = z^4 - z^2$ अनुकोण नहीं रहती।
- (x) Define Harmonic function in a domain D . Also give its one example.
 किसी प्रांत D में एक प्रसंवादी फलन की परिभाषा दीजिये। इसका एक उदाहरण भी दीजिये।

Part-B (भाग-ब)

2. Prove that there lie an infinite number of irrational numbers, between two different real numbers. सिद्ध कीजिये कि किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त अपरिमेय संख्याएँ विद्यमान होती है।
3. Let A be a non-empty subset of a metric space (X, d) then $x, y \in X$
 $\forall x, y \in X$. मान लीजिये (X, d) एक दूरीक समष्टि है एवं A, X का एक अरिक्त उपसमुच्चय है तब $x, y \in X \forall x, y \in X$
 Prove that : सिद्ध कीजिये :
- $$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$
4. If A is nowhere dense set, then prove that $\bar{A} \neq X$.
 यदि A अघन समुच्चय है, तब सिद्ध कीजिये कि $\bar{A} \neq X$
5. Prove that the image of a Cauchy sequence under a uniform continuous map is a Cauchy sequence. सिद्ध कीजिये कि एक कॉशी अनुक्रम का एकसमान संतत फलन के सापेक्ष प्रतिबिम्ब भी कॉशी अनुक्रम होता है।
6. Using definition of the derivative find $f'(z)$ at $z = -i$, when:
 $z = -i$ पर अवकलज की परिभाषा का उपयोग करते हुए $f'(z)$ ज्ञात कीजिये,

$$\text{जबकि } f(z) = \frac{2z - i}{z + 2i}$$

Part-C (भाग-स)

Unit-I (भाग-I)

7. (a) State and prove Archimedean property of real number.
 वास्तविक संख्याओं के लिए आर्किमीडियन प्रगुण को लिखिये और सिद्ध कीजिये।
- (b) Let A and B be two bounded sets in a metric space (X, d) , then $A \cup B$

is also bounded in (X, d) . Prove it. मान एक दूरीक समष्टि (X, d) में A तथा B दो परिबद्ध समुच्चय हैं, तब $A \cup B$ भी (X, d) में परिबद्ध होगा। सिद्ध कीजिये।

8. (a) State and prove Bolzano-Weirstrass theorem.
बॉलजानो-वाइस्ट्रास प्रमेय का कथन लिखिये और इसे सिद्ध कीजिये।
(b) In a metric space, every closed sphere is a closed set. Prove it.
किसी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक संवृत गोलक एक संवृत समुच्चय है। सिद्ध कीजिये।

Unit-II (भाग-II)

9. (a) Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होती है।
(b) Let (Y, d) be a subspace of a complete metric space (X, d) , then Y is complete iff Y is closed.
माना (Y, d) एक पूर्ण दूरीक समष्टि (X, d) की एक उपसमष्टि है। तब Y पूर्ण है, यदि और केवल यदि Y संवृत है।
10. (a) State and prove Banach's Fixed Point theorem.
बनाख स्थिर बिन्दु प्रमेय का कथन लिखिये और सिद्ध कीजिये।
(b) The continuous image of compact set is compact. Prove it.
संहत समुच्चय का संतत प्रतिबिम्ब संहत होता है। सिद्ध कीजिये।

Unit-III (भाग-III)

11. (a) Find all the bilinear transformations which maps the upper half plane $\text{Im}(z) \geq 0$ onto the unit circular disc $|w| \leq 1$.
ऐसे सभी द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो ऊपरी अर्द्धतल $\text{Im}(z) \geq 0$ को इकाई वृत्त डिस्क $|w| \leq 1$ में प्रतिचित्रित करे।
(b) If z_1, z_2 and z_3 are the vertices of an isosceles triangles right angled at the vertex z_2 , then prove that : यदि z_1, z_2 तथा z_3 एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हों जो शीर्ष z_2 पर समकोणीय है, तो सिद्ध कीजिए:

$$z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2(z_1 + z_3)z_2$$

12. (a) If $f(z)$ is an analytic function of z in a region D of z -plane and $f'(z) \neq 0$ in D , then the mapping $w = f(z)$ is conformal at all points of D .
यदि (z) z - समतल के प्रान्त D में z -का एक विश्लेषिक फलन है तथा D में $f'(z) \neq 0$ तो प्रतिचित्रण $w = f(z)$, D के बिन्दुओं पर अनुकोण प्रतिचित्रण है।
(b) Prove that the function u is harmonic. Also find its conjugate harmonion. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलन u प्रसंवादी है। इसका संयुग्मी प्रसंवादी भी ज्ञात कीजिए:

$$4(x, y) = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$$