
MATHEMATICS

Second Paper : Analysis

Time Allowed :- Three Hours

**Maximum Marks : 75 For
Science
66 for Arts**

Section - A (खण्ड-अ) Max. Marks : 15

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section - B (खण्ड-ब) Max. Marks : 15

सभी पांच प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section - C (खण्ड-स) Max. Marks : 45

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिए। प्रश्नों का उत्तरा 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

SECTION - A (खण्ड-अं)

1. (i) Write order completeness axiom for an ordered field.

क्रमिक क्षेत्र हेतु क्रम पूर्णता अभिग्रहीत लिखिये।

- (ii) Define limit point of sub-set of real numbers.

वास्तविक संख्याओं के उप-समुच्चय की सीमा बिन्दु परिभाषित कीजिये।

- (iii) Define a metric space. दूरिक समष्टि की परिभाषा लिखिये।

- (iv) What is complete metric space? Give one example.

पूर्ण दूरिक समष्टि क्या है? एक उदाहरण दीजिये।

- (v) Define sequence in a metric space.

दूरिक समष्टि में अनुक्रम परिभाषित कीजिये।

- (vi) Define compact metric space. संहत दूरिक समष्टि परिभाषित कीजिये।

- (vii) Define connected set in Argend plane.

आर्गेण्ड समतल में सम्बद्ध समुच्चय परिभाषित कीजिये।

- (viii) What is Zordan Arc Argend plane?

सम्मिश्र समतल में जोरदाँ चाप क्या होती है?

- (ix) Write polar form of Cauchy-Riemann equations.

कोशी-रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप लिखिये।

- (x) Define conformal mapping.

अनुकोण प्रतिचित्रण परिभाषित कीजिये।

SECTION - B (खण्ड-ब)

2. Prove that every complete ordered field is an Archimedean ordered field. सिद्ध कीजिये प्रत्येक पूर्ण क्रमित क्षेत्र एक आर्किमिडीयन क्रमित क्षेत्र होता है।

3. If A be a non-empty sub-set of a metric space (X, d) then for $x, y \in X$ Prove that : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

यदि A एक दूनिक समष्टि (X, d) का अस्तित्व उप समुच्चय हो तो $x, y \in X$ हेतु सिद्ध कीजिये : $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$

4. In a metric space, prove that intersection of an arbitrary family of closed set is closed. एक दूरिक समष्टि में सिद्ध कीजिये कि संवृत समुच्चयों का एक स्वेच्छ संग्रह का सर्वनिष्ठ संवृत होता है।

5. Prove that every convergent sequence in a metric space is bounded.

सिद्ध कीजिये कि दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

6. Show that $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)$ does not exist.

सिद्ध कीजिये $\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{\bar{z}}{z} \right)$ विद्यमान नहीं है।

SECTION - C (खण्ड - स)

Unit - I (इकाई - I)

7. (a) Prove that between any two different real numbers there lie an infinite number of rational numbers.

सिद्ध कीजिये किन्हीं दो भिन्न संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

- (b) Prove that every infinite bounded sub-set of real numbers has at least one limit point. सिद्ध कीजिये वास्तविक संख्याओं के प्रत्येक अपरिमित परिबद्ध उप-समुच्चय का कम-से-कम एक सीमा बिन्दु होता है।

8. (a) Let the mapping $d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$ is defined by :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}; \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R^2$$

then d is a metric for R^2

एक प्रतिचित्रण $d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$ में निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}; \forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in R^2$$

तो d, R^2 पर एक दूरिक है।

- (b) A subset A of a space X is closed iff it contains all of its limit points i.e. $D(A) \subset A$.

किसी दूरिक समष्टि X का एक उप-समुच्चय A संवृत है यदि और केवल यदि $D(A) \subset A$ अर्थात् A अपने सभी सीमा बिन्दुओं का अन्तर्विष्ट करता है।

Unit - II (इकाई - II)

9. (a) Prove that every convergent sequence in a metric space is a Cauchy sequence, but converse need not be true.

सिद्ध कीजिये किसी दूरिक समष्टि में प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम एक कोशी अनुक्रम होता है किन्तु विलोम आवश्यक रूप से सत्य नहीं है।

- (b) Prove that the usual metric space (R, d) is a complete metric space. [R is set of real numbers].

सिद्ध कीजिये कि साधारण दूरिक समष्टि (R, d) एक पूर्ण दूरिक समष्टि है।

[R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है]

10. (a) Prove that every complete metric space is of second category as a sub-set of itself. सिद्ध कीजिये स्वयं का उप-समुच्चय मानते हुए प्रत्येक पूर्ण दूरिक समष्टि द्वितीय संवर्ग की है।
(b) Prove that every contracting mapping is continuous.
सिद्ध कीजिये प्रत्येक संकुचित प्रतिचित्रण संतत होता है।

Unit - III (इकाई - III)

11. (a) Prove that $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \lambda \neq 1$ and $a m p \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \mu$ are orthogonal circles. Where λ and μ are constants.

सिद्ध कीजिये कि $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \lambda \neq 1$ तथा $a m p \left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \mu$ लम्बकासेणीय वृत है। जहाँ λ व μ अचर हैं।

- (b) State and prove sufficient condition for a function $w = f(z)$ to be analytical in domain D . फलन $w = f(z)$ के किसी प्रान्त D में विश्लेषिक होने हेतु पर्याप्त प्रतिबन्ध कथन सहित सिद्ध कीजिये।

12. (a) Prove that $\mu(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ is harmonic. Also determine its conjugate and corresponding $f(z)$ in terms of z .

सिद्ध कीजिये कि $\mu(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$ प्रसंवादी है। इसका संयुग्मी प्रसंवादी निर्धारित कीजिये तथा $f(z)$ भी z के पदों में ज्ञात कीजिये।

- (b) Prove that if $m = f(z)$ is a conformal mapping of domain D' of the w -plane, then $f(z)$ is analytic function of z in D .

सिद्ध कीजिये यदि $m = f(z)$ किसी प्रान्त D' में अनुकोण प्रतिचित्रण हो तो $f(z)$ प्रान्त D में विश्लेषिक होता है।