

MATHEMATICS

Paper-II : Analysis

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ (अनिवार्य)

1. (i) Prove that for every real number a $|a| = \max \{a, -a\}$.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक वास्तविक संख्या a के लिए $|a| = \max \{a, -a\}$.
- (ii) Show that Q -set of rational numbers is not an open set.
दर्शाइये कि Q -परिमेय संख्याओं का समुच्चय एक विवृत समुच्चय नहीं है।
- (iii) Define Interior point of a set.
किसी समुच्चय के आन्तरिक बिन्दु को परिभाषित कीजिये।
- (iv) Considering usual metric d on R and set $A = [2, 3)$ and $B = (3, 5]$ on the real line R , Show that $d(A) = 0$, $(A, B) = 0$.
मानते हुए कि d R में साधारण दूरीक है तथा वास्तविक रेखा R पर अद्वितीय अन्तराल $A = [2, 3)$ एवं $B = (3, 5]$ है, तो प्रदर्शित कीजिये:

$$d(A) = 0, (A, B) = 0$$

(v) Define bounded subset of a metric space.

किसी दूरीक समष्टि के लिए परिबद्ध उपसमुच्चय को परिभाषित कीजिये।

(vi) Define contracting mapping for a metric space.

एक दूरीक समष्टि के लिए संकुचन प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिये।

(vii) State finite intersection property of metric space.

दूरीक समष्टि के लिए परिमित सर्वनिष्ठ प्रगुण का प्रकथन लिखिये।

(viii) Show that for a complex number z $amp(z) = \frac{\pi}{2} + amp\bar{z}$.

किसी सम्मिश्र संख्या z के लिए दर्शाइये कि $z = \frac{\pi}{2} + amp\bar{z}$

(ix) Define open domain for complex plane.

सम्मिश्र समतल के लिए विवृत प्रांत परिभाषित कीजिये।

(x) State necessary condition of a conformal mapping.

अनुकोण प्रतिचित्रण के लिए आवश्यक प्रतिबंध का प्रकथन लिखिये।

Part-B (भाग-ब)

2. If p and q are rational number and irrational number respectively, prove that pq and $p + q$ are irrational numbers.

यदि p तथा q क्रमशः परिमेय तथा अपरिमेय संख्या हो तो सिद्ध कीजिये कि pq एवं $p + q$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।

3. For the usual metric d on $[0, 1]$ describe $s_1\left(\frac{1}{2}\right)$ and $s_2\left[\frac{1}{35}, \frac{1}{35}\right]$. [0, 1] पर साधारण

दूरीक d के लिए निम्न की रचना कीजिये $s_1\left(\frac{1}{2}\right)$ or $s_2\left[\frac{1}{35}, \frac{1}{35}\right]$

4. A point x is a limit point of a subset A of a metric space X if each open sphere with centre x contains infinitely many points of A .

मान लीजिए (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा A, X का एक उपसमुच्चय है। एक बिन्दु $x \in A$ का एक सीमा बिन्दु है यदि x पर केन्द्रित प्रत्येक विवृत गोलक A के अनन्त बिन्दुओं को अन्तर्विष्ट करती है।

5. What is the image of the triangular region of the Z -plane bounded by

the lines $x=0$, $y=0$ and $\sqrt{3}x+y=1$ under the transformation $w=e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)}z$?

Z -समतल में रेखाओं $x=0$, $y=0$ तथा $\sqrt{3}x+y=1$ रेखाओं से परिसीमित त्रिभुजाकार क्षेत्र का रूपान्तरण $w=e^{\left(\frac{\pi}{3}\right)}z$ के अन्तर्गत w समतल में प्रतिबिम्ब क्या है?

6. If $(u - v) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ and $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$, find $f(z)$ in terms of z .

यदि $(u - v) = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ तथा $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$ का एक विश्लेषिक फलन है, तो $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिये।

Part-C(भाग-स)

Unit-I(इकाई-I)

7. Prove that the set of rational numbers is not a complete ordered field.
परिमेय संख्याओं का समुच्चय एक पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।
8. (a) Let (x, d) be a metric space and let $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$, then d^* is a metric for X .

मान लीजिये (x, d) एक दूरीक समष्टि है तथा फलन d^* इस प्रकार परिभाषित है कि $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ तो सिद्ध कीजिये कि $d^* X$ में एक परिबद्ध दूरीक है।

- (b) Prove that in a metric space each open sphere is an open set.
किसी दूरीक समष्टि में, प्रत्येक विवृत गोलक एक विवृत समुच्चय होता है।

Unit-II(इकाई-II)

9. (a) If x is a limit point of a subset E of a metric space (X, d) , then there exist a sequence $\langle x_n \rangle$ of points of E , all distinct from x which converges to x .

मान लीजिये E किसी दूरीक समष्टि (X, d) का एक उप समुच्चय है यदि बिन्दु x समुच्चय E का सीमा बिन्दु हो तो E में एक ऐसे विभिन्न पदों के अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ का अस्तित्व है कि $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

- (b) Prove that if A is non-dense set in X , then each open sphere contains a closed sphere which contains no point of A .

सिद्ध कीजिये कि यदि किसी दूरीक समष्टि X में A एक अघन समुच्चय है, प्रत्येक विवृत गोलक में एक संवृत गोलक (जिसमें A का कोई बिन्दु नहीं है) होता है।

10. State and prove Banach's fixed point theorem.

बानाक रिथर बिन्दु प्रमेय का प्रकथन लिखिये एवं सिद्ध भी कीजिये।

Unit-III(इकाई-III)

11. (a) If n is real, show that $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ is analytic except when $r = 0$ and then its derivative is $nr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta]$.

यदि n वास्तविक है तो प्रदर्शित कीजिये कि $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ $r = 0$ के अतिरिक्त विश्लेषिक है तथा इसका अवकलज $nr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta]$

- (b) Derive the equation of straight line joining two points Z_1 and Z_2 of a complex plane.

सम्मिश्र तल के दो बिन्दुओं Z_1 तथा Z_2 को मिलान वाली सरल रेखा का समीकरण निकालिये।

12. (a) Prove that in the region $|z| < 1$, $f(z) = z^2$ uniformly continuous whereas $f(z) = 1/z$ not so.

सिद्ध कीजिये कि प्रान्त $|z| < 1$ में $f(z) = \bar{z}$ एक समान संतत है जबकि $f(z) = 1/z$ एक समान संतत नहीं है।

(b) Find the bilinear transformation which transforms the half plane $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ into the unit circular disc $|w| \leq 1$

वह द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जो अर्धतल $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ को इकाई वृत्तीय चक्री $|w| \leq 1$ में प्रतिचिन्तित करता है।