

## MATHEMATICS

### Second Paper : Analysis

**Time allowed : Three hours**

**Maximum Marks 75 for**

**Science 66 for Arts.**

#### **Parts - A**

1. If  $x$  is an element of ordered field  $F$ , then prove that  $x > 0 \Rightarrow -x < 0$ .  
यदि  $x$  क्रमित क्षेत्र  $F$  का एक अवयव है तो सिद्ध कीजिये  $x > 0 \Rightarrow -x < 0$
2. Prove that every finite set is bounded.  
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक परिमित समुच्चय परिषद्ध होता है?
3. Give an example to prove that the union of infinite number of closed set is not a closed set.  
असीमित संख्याओं में संवृत्त समुच्चयों का संघ का संवृत्त होना आवश्यक नहीं है।  
उदाहरण से स्पष्ट कीजिये।
4. Define connected set. सम्बद्ध समुच्चय को परिभाषित कीजिये।
5. Define diameter of  $A$  and distance between the subsets of a Metric space  $(X, d)$ .  
समुच्चय का व्यास तथा दूरीक समष्टि  $(X, d)$  के दो उप-समुच्चयों के बीच की दूरी को परिभाषित कीजिये।
6. Define uniform continuity of function for metric space.  
दूरीक समष्टि में एकसमान सांतत्य फलनों को परिभाषित कीजिये।
7. Define Cauchy sequence in a Metric space  $(X, d)$ .  
दूरीक समष्टि  $(X, d)$  में कोशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिये
8. For a complex number  $z$  prove that : समिश्र संख्या  $z$  के लिए सिद्ध कीजिये:  
 $\arg(z) - \arg(-z) = \pm\pi$

9. State necessary condition for  $f(z)$  to be analytic.  
विश्लेषिक फलन के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध का प्रकथन लिखिये।
10. Write the name of four elementary transformation.  
कोई चार प्रकार के प्रारम्भिक रूपान्तरण के नाम लिखिए।

### Parts - B

11. Prove that no open interval  $(a,b)$  is compact.  
सिद्ध कीजिए कि कोई विवृत अन्तराल  $(a,b)$  संहत नहीं है।
12. Describe open spheres for usual metric on  $\mathbb{R}^2$ .  
 $\mathbb{R}^2$  पर साधारण दूरीक के लिए विवृत गोलक की रचना कीजिये।
13. Let  $X$  and  $Y$  be two metric spaces, then prove that a mapping is continuous if inverse image of each set in  $Y$  is open in  $X$ .  
यदि  $X$  और  $Y$  दो दूरीक समष्टियाँ हैं तब सिद्ध कीजिये कि  $X$  में प्रत्येक विवृत समुच्चय का प्रतिलोम प्रतिबिम्ब  $Y$  में विवृत है।
14. Prove that following function is harmonic, determine harmonic conjugate and find corresponding in terms of  $z$ .  
 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$   
 सिद्ध कीजिये कि निम्न फलन प्रसंवादी है, संयुगमी प्रसंवादी भी निर्धारित कीजिये तथा संगत विश्लेषिक फलन भी ज्ञात कीजिये :  
 $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$
15. Prove that bilinear transformation  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  is a combination of elementary transformation.  
 सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण  $w = \frac{az + b}{cz + d}$  प्रारम्भिक रूपान्तरणों का संयुक्त रूप है।

### Parts - C

#### Unit - I

16. (a) Prove that for any real number  $x$ , there exist one and only one integer  $n$  such that :  
 $n \leq x \leq n + 1$   
 सिद्ध कीजिये कि किसी भी वास्तविक संख्या  $x$  के लिए एक और केवल एक ऐसा पूर्णांक विद्यमान होता है कि
- $n \leq x \leq n + 1$
- (b) Prove that set  $Q$  of rational number is not a complete ordered field.  
 सिद्ध कीजिये कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय  $Q$  एक पूर्ण क्रमित क्षेत्र नहीं है।

OR

- (a) Let Euclidean metric  $d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$  be defined by

$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$   $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$  then prove that  $(R^2, d)$  is a metric space.

यदि यूक्लीडीय दूरीक  $d : R^2 \times R^2 \rightarrow R$  से निम्न प्रकार से परिभाषित

$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$   $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in R^2$  तब सिद्ध कीजिये कि  $(R^2, d)$  दूरीक समष्टि है।

- (b) Let  $A$  be subset of metric space  $(X, d)$  then prove that :

किसी दूरीक समष्टि  $(X, d)$  का एक उपसमुच्चय  $A$  है, तो सिद्ध कीजिये :

$$\bar{A} = A \cup D(A)$$

### Unit-II

17. (a) If  $x$  is the limit point of a subset  $E$  of a metric space  $(X, d)$  then prove that there exist a sequence  $(x_n)$  of points of  $E$ , all distinct from  $x$  which converges to  $x$ .

मान लीजिये  $E$  किसी दूरीक  $(X, d)$  का एक उपसमुच्चय है यदि बिन्दु  $x$  समुच्चय  $E$  का सीमा बिन्दु हो तो सिद्ध कीजिये कि  $E$  में एक ऐसे विभिन्न पदों के अनुक्रम  $\{x_n\}$  का अस्तित्व है, जिसको सीमा  $x$  है।

- (b) Let  $X$  and  $Y$  be two metric spaces  $f$  is a mapping  $X$  into  $Y$  then prove that  $f$  is continuous at  $x_0$  iff.

माना कि  $X$  एवं  $Y$  दो दूरीक समष्टियाँ हैं तथा  $f$  प्रतिवित्रण  $X$  से  $Y$  में परिभाषित है तब सिद्ध कीजिये कि फलन  $f|_{x_0}$  पर संतत है यदि और केवल यदि  $x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$

OR

Prove that a metric space is sequentially compact iff it has Bolzano-Weierstrass property.

सिद्ध कीजिये कि एक दूरीक समष्टि अनुक्रमशः संहत होती है यदि और केवल यदि वह बालजानो-वाइस्ट्रास प्रगुण का पालन करती है।

### Unit-III

18. (a) Prove that for complex numbers  $x, y$ .

$$\left| \frac{x-y}{1-\bar{z}y} \right| < 1 \text{ if } |x| < 1 \text{ and } |y| < 1$$

सिद्ध कीजिए कि यदि  $x, y$  दो सम्मिश्र संख्या हों तो  $\left| \frac{x-y}{1-\bar{xy}} \right| < 1$  होगा यदि  $|x| < 1$   
और  $|y| < 1$

- (b) If  $n$  is real, show that  $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$  is analytic except when  $r = 0$  and then its derivative is

$$nr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta].$$

यदि  $n$  वास्तविक है तो प्रदर्शित कीजिये कि  $r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$  के अतिरिक्त विश्लेषिक है तथा इसका अवकलज है :

$$nr^{n-1}[\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta]$$

OR

- (a) If  $f(z) = u + iv$  is an analytic function and  $u - v = e^x (\cos y - \sin y)$  then find  $f(z)$  in terms of  $z$ .

यदि  $f(z) = u + iv$  एक विश्लेषिक फलन हो तथा  $u - v = e^x (\cos y - \sin y)$  तो  $f(z)$  को  $z$  के पदों में ज्ञात कीजिये।

- (b) Prove that the bilinear transformation transforms any two points which are inverse with respect to a circle into two points which are inverse with respect to the transformed circle.

सिद्ध कीजिये कि द्विरैखिक रूपान्तरण किन्हीं दो बिन्दुओं को जो एक वृत्त के सापेक्ष प्रतिलोम बिन्दु हैं ऐसे दो बिन्दुओं में प्रतिचिन्ति-करता है जो रूपान्तरित वृत्त के सापेक्ष प्रतिलोम बिन्दु हैं।