

MATHEMATICS

Paper - I Algebra and Matrices

Time Allowed : Three Hours

M. M. : 75

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Define linear dependence and linear independence of vectors.
संदिशों की रैखिक परतंत्रता व स्वतंत्रता की परिभाषा लिखिये।
2. What are characteristic roots of a matrix.
एक मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मूल क्या होते हैं?
3. Write any two properties of roots of equations.
समीकरणों के मूलों की कोई दो विशेषताएँ लिखियें।
4. Write one example of non-void finite group.
अरिक्त परिमित समूह का एक उदाहरण लिखिये।
5. Define order of an element of a group.
समूह के किसी अवयव की कोटि की परिभाषा लिखिये।
6. Define cosets of a sub-group of a group.
समूह के उप-समूह के सह-समुच्चयों को परिभाषा कीजिये।
7. What is index of a sub-group? उपसमूह का सूचकांक क्या होता है?
8. State Farmet's theorem. फर्मा प्रमेय का कथन लिखिये।
9. What are disjoint cycles? असंयुक्त चक्र क्या होते हैं?
10. Define Group Automorphism. समूह स्वकारिता की परिभाषा लिखिये।

Part-B (भाग-ब)

11. Reduce the following matrix in normal form and find its rank.
निम्न मैट्रिक्स को अभिलम्ब रूप में समानीत कर कोटि ज्ञात कीजिये:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Or (अथवा)

If two roots of equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are equal but of opposite sign then prove that $pq = r$. यदि समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के दो मूल समान परन्तु विपरीत चिन्ह के हों तो सिद्ध कीजिये $pq = r$ ।

12. Apply matrix theory to solve the following system of equations :
मैट्रिक्स सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिये:
$$2x - y + 3z = 8$$

$$\begin{aligned} -x - 2y + z &= 4 \\ 3x + y - 4z &= 0 \end{aligned}$$

Or (अथवा)

Prove the following set forms group with respect to operation mentioned against them :

सिद्ध कीजिये निम्न समुच्चय उनके सम्मुख अंकित संक्रिया हेतु समूह है:

$$\{1, 2, 3, 4\} \quad X, (\text{Multiplication modulo } 5)$$

13. Find the order of each element of following group :

निम्न समूह में प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिये:

$$\{\{1, -1, i, -i\}, X\}$$

Or (अथवा)

A non-void finite sub-set H of a group G is a sub group if $a \in H, b \in H$ $a, b \in H$. किसी समूह G का कोई अरिक्त परिमित उपसमुच्चय H एक उपसमूह होगा यदि $a \in H, b \in H, a, b \in H$.

14. If $G = (z, +)$ and $H = 2z = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ then write all different cosets of H in G. यदि $G = (z, +)$ व $H = 2z = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ हों तो H के G में सभी निम्न सहसमुच्चय ज्ञात कीजिये।

Or (अथवा)

If H is a sub-group of a group G and $a, b \in G$ then:

यदि H किसी समूह G का उपसमूह हो व $a, b \in G$ तो:

$$Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

15. Express following permutation as the product of disjoint cycles state whether it is even or odd:

निम्न क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिये व बताइये यह सम है या विषम:

$$\psi = (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) (1 \ 2 \ 3) (4, 5) \in S_5$$

Or (अथवा)

If $f : (R, +) \rightarrow (Co, X)$, $f(x) = e^{ix}$ is a morphism, then find its kernel.

यदि $f : (R, +) \rightarrow (Co, X)$, $f(x) = e^{ix}$ एक समाकारिता हो तो इसकी अष्टि ज्ञात कीजिये।

Part-C (भाग-स)

Unit - I (इकाई- 1)

16. (a) State and prove Caley-Hamilton theorem.

कैले-हैमिल्टन प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिये।

- (b) Solve the equation $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$, the roots being in A.P.

समीकरण $x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$ को हल कीजिये, जबकि मूल समानान्तर श्रेणी में हों।

Or (अथवा)

- (a) Find the inverse of following matrix with the help of Cayley-Hamilton theorem:

कैले-हैमिल्टन प्रमेय की सहायता से निम्न मैट्रिक्स का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिये:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (b) Solve : $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$.

समीकरण हल कीजिये – $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$

Unit - II (इकाई-2)

17. (a) If S is the set of real numbers other than -1, then show that (S, \cdot) is a group where \cdot is defined as :

यदि -1 के अतिरिक्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय S हो तो सिद्ध कीजिये (S, \cdot) एक समूह है जहाँ \cdot निम्न प्रकार परिभाषित हैं:

$$a \cdot b = a + b + ab \quad \forall a, b \in S$$

- (b) Prove that intersection of any two sub groups of a group G is again a sub-group.

सिद्ध कीजिये G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी G का उपसमूह होगा।

Or (अथवा)

- (a) Prove that order of every element of a finite group is finite and less than or equal to order of the group. सिद्ध कीजिये किसी परिमित समूह के किसी अवयव की कोटि परिमित व समूह की कोटि से कम या बराबर होती है।

- (b) For any element a of a group G, Prove that :

एक समूह G के किसी अवयव a हेतु सिद्ध कीजिये :

$$0(a) = 0(x^{-1}ax) \quad \forall x \in G$$

Unit - III (इकाई-3)

18. (a) A sub-group H of a group is a normal sub-group if

किसी समूह H का कोई उपसमूह प्रसामान्य उपसमूह होगा यदि और केवल यदि:

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow xHx^{-1} = H$$

- (b) Prove that every permutation can be expressed as the product of disjoint cycles. सिद्ध कीजिये प्रत्येक क्रमचय को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

Or (अथवा)

-
- (a) Prove that every group is homomorphic to its quotient group.
सिद्ध कीजिये प्रत्येक समूह अपने विभाग समूह के समाकारी होता है।
- (b) State and prove fundamental theorem on morphism.
समाकारिता के मूलभूत प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिये।
-