

# **MATHEMATICS**

## **Paper- I : Algebra and Matrices**

**Time : Three Hours**

**M.M. : 75/66**

### **Part-A (Compulsory)**

**[Marks : 15]**

**भाग- अ ( अनिवार्य )**

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

### **Part-B (Compulsory)**

**[Marks : 15]**

**भाग- ब ( अनिवार्य )**

सभी पांच प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

### **Part-C ( भाग- स )**

**[Marks : 45]**

प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न चुनते हुए कुल तीन प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

### **Part-A (Compulsory)**

**[Marks : 15]**

## भाग- अ ( अनिवार्य )

1. Define Hermitian and skew hermitian matrix.  
हर्मीशियन व विषम हर्मीशियन मेट्रिक्स की परिभाषा लिखिए।
2. Write definition of characteristic matrix of matrix.  
किसी मेट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मेट्रिक्स की परिभाषा दीजिए।
3. Write any two properties of roots of equations.  
समीकरणों के मूलों की कोई दो विशेषताएँ लिखिये।
4. Give one example of finite non-commutative group.  
एक परिमित अक्रमविनिमय समूह का उदाहरण दीजिये।
5. Define order of an element of a group.  
समूह के किसी अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिये।
6. Write definition of sub-group of a group.  
किसी समूह के उप-समूह की परिभाषा लिखिये।
7. Define Cyclic Group. चक्रीय समूह की परिभाषा लिखिए।
8. Write definition of normal sub-group of a group.  
किसी समूह की प्रसामान्य उप-समूह की परिभाषा लिखिये।
9. What are disjoint cycles? असंयुक्त वर्क क्या होते हैं?
10. Define Kernel of a homomorphism.  
समाकारिता की अस्ट्रिक्ट की परिभाषा लिखिये।

## Part - B (Compulsory)

### भाग- ब ( अनिवार्य )

11. Show that following vectors are linearly independent:

सिद्ध कीजिये कि निम्नलिखित सदिश एकघाततः स्वतंत्र हैं:

$$\alpha_1 = (1, 1, 0); \alpha_2 = (1, 1, 1); \alpha_3 = (2, 1, 3)$$

Or

If one root of the following equation is  $3 + 2i$ , then find remaining roots:

यदि निम्न समीकरण का एक मूल  $3 + 2i$  हो तो शेष मूल ज्ञात कीजिये:

$$x^3 - 7x^2 + 19x - 13 = 0$$

12. Find the characteristic vectors of the following matrix:

निम्न मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक सदिश ज्ञात कीजिये:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Or

Prove that following set forms a group with respect to operation mentioned against them:

सिद्ध कीजिये कि निम्न समुच्चय उनके सामने लिखी संक्रिया हेतु समूह है:

$$\{0, 1, 2, 3, 4\} + , (\text{addition modulo } 5)$$

2014  
13. If  $a$  is the only element of order 2 in group  $G$ , then show that:

यदि  $a$  किसी समूह  $G$  में 2 कोटि का अवयव हो तो सिद्ध कीजिये :

$$ax = xa \quad \forall x \in G$$

Or

Prove that a non-void sub-set  $H$  of group  $G$  is a sub-group iff:

सिद्ध कीजिये किसी समूह  $G$  का कोई अरिक्त समूह समुच्चय  $H$  एक उप-समूह होगा यदिदि:

$$a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

14. Show that order of every sub-group of a finite group is a divisor of order of the group. प्रदर्शित कीजिये कि किसी परिमित समूह की कोटि को उसके किसी उपसमूह की कोटि पूर्ण विभाजित करती है।

Or

Prove that order of a cycle of length  $r$  is  $r$ .

सिद्ध कीजिये कि  $r$  लम्बाई के चक्र की कोटि  $r$  होती है।

15. If : यदि :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1\ 3\ 4)(5\ 6)(2\ 7\ 8\ 9)$$

then find : ज्ञात कीजिये:

$$\sigma^{-1}\rho\sigma$$

Or

If  $f$  is a homomorphism of a group  $G$  to a group  $G'$  then prove that a sub-group of  $G$  then  $f(H)$  is a sub-group of  $G'$ .

यदि  $f$  एक समूह  $G$  से  $G'$  में समाकारिता हो तो सिद्ध कीजिये कि यदि  $H$ ,  $G$  का एक उपसमूह हो तो  $f(H)$ ,  $G'$  का उपसमूह होता है।

### SECTION - C (खण्ड - स)

#### Unit - I इकाई - I

16. (a) Prove that if characteristic roots of matrix  $A$  are  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  then characteristic roots of  $A^p$  are  $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p$  where  $p$  is a positive integer.

सिद्ध कीजिये यदि मैट्रिक्स  $A$  के अभिलाखणिक मूल  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$  हो तो

मैट्रिक्स  $A^p$  के अभिलाखणिक मूल  $\lambda_1^p, \lambda_2^p, \lambda_3^p, \dots, \lambda_n^p$  होंगे जहाँ  $p$  एक ऐसा नात्मक पूर्णांक है।

- (b) If the roots of the equation  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  are in Harmonic

progression then prove that the mean root is  $\frac{3c}{b}$ .

यदि समीकरण  $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$  के मूल हरात्मक श्रेणी में हों तो सिद्ध कीजिये कि माध्य मूल  $\frac{3c}{b}$  है।

**Or**

- (a) Verify Caley-Hamilton theorem for following matrix  $A$  and compute  $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I$ :

निम्नलिखित मेट्रिक्स  $A$  के लिए कैले-हेमिल्टन प्रमेय का सत्यापन कीजिये व  $2A^8 - 3A^5 + A^4 + A^2 - 4I$  की गणना कीजिये:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Solve following system of equation by matrix theroy:  
मेट्रिक्स सिद्धान्त से निम्न समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिये:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 2 \\ 2x + 4y + 5z &= 3 \\ 3x + 5y + 6z &= 3 \end{aligned}$$

### Unit-II इकाई - II

17. (a) Show that the set  $Q^+$  of positive rational number forms an abelian group for the operation '\*' defined as:

सिद्ध कीजिये धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय  $Q^+$  निम्न द्विआधारी संक्रिया '\*' के सापेक्ष एक क्रमविनिमेय समूह है:

$$a * b = \frac{ab}{2} \quad \forall a, b \in Q$$

- (b) Prove that any group of order 3 is cyclic.

सिद्ध कीजिये 3 कोटि का कोई भी समूह चक्रीय समूह होता है।

**Or**

- (a) Prove that the set  $G = \{x : x^n = 1\}$  of  $n$ th roots of unity is a finite cyclic group of order  $n$ . सिद्ध कीजिये समुच्चय  $G = \{x : x^n = 1\}$  इकाई के  $n$  वें मूलों का समुच्चय एक कोटि का चक्रीय समूह होता है।

- (b) Prove that any two left cosets of a sub-group are either identical or disjoint. सिद्ध कीजिये किसी उप-समूह के कोई दो बायें सहसमुच्चय या तो एकसमान या बिल्कुल असंयुक्त होते हैं।

### Unit-III इकाई - III

18. (a) Prove that a sub-group  $H$  of a group  $G$  is a normal sub-group iff product of two right coset of  $H$  in  $G$  is again a right coset of  $H$  in  $G$ .  
 सिद्ध कीजिये किसी समूह  $G$  का उप-समूह  $H$  एक प्रसामान्य उप-समूह होता है यदि यदि  $H$  के किन्हीं दो सह-समुच्चयों का गुण पुनः  $H$  का एक सह समुच्चय होता है।
- (b) If  $H$  and  $K$  are two normal sub-groups of a group  $G$ , then show that  $HK \trianglelefteq G$ .  
 यदि  $H$  व  $K$  किसी समूह  $G$  के प्रसामान्य उप-समूह हों तो सिद्ध कीजिये  $HK \trianglelefteq G$ .
- Or
- (a) Prove that every homomorphic image of a group is isomorphic to some quotient group.  
 सिद्ध कीजिये किसी भी समूह का समाकारिता प्रतिबिम्ब एक विभाग समूह के आइसोमोरफिक होता है। (समाकारिता का मूलभूत प्रमेय)
- (b) State and prove Cayley's theorem.  
 कैली प्रमेय को कथन सहित सिद्ध कीजिये।