

MATHEMATICS

Paper- II : Calculus

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 10]

1. Define Asymptote. अनन्तस्पर्शी की परिभाषा लिखो।
2. What is radius of curvature? वक्रता त्रिज्या क्या होती है?
3. Write definition of kinds of cusp. उभयाग्र के प्रकारों की परिभाषा लिखो।
4. Define Rectification. चापकलन परिभाषित करो।
5. State Euler's theorem on homogeneous functions.
समघात फलनों हेतु आयरलर प्रमेय का कथन लिखो।
6. What is Envelope? अन्वालोप क्या होता है?
7. Write relation between Beta and Gamma functions.
बीटा व गामा फलनों में सम्बन्ध लिखो।
8. Write formula for length of arc for polar curves.
ध्रुवीय वक्रों हेतु चाप की लम्बाई ज्ञात करने का सूत्र लिखो।
9. What is the volume generate by revolution about any line? (Write formula only) किसी रेखा के परितः परिक्रमण से जनित आयतन क्या होता है?
10. Evaluate $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx dy$

PART-B (COMPULSORY)

11. The radius of curvature at any point of the cardioide $s = 4a \sin \frac{1}{3} \{\Psi - \lambda/2\}$ is P and length of arc of the vertex and the point is S, then prove that $s^2 + 9P^2 = 16a^2$.
कार्डियोइड $s = 4a \sin \frac{1}{3} \{\Psi - \lambda/2\}$ के किसी बिन्दु पर वक्रता त्रिज्या और शीर्ष तथा बिन्दू तक चाप की लम्बाई s हो तो सिद्ध करो $s^2 + 9P^2 = 16a^2$.
12. Find the nature and position of double points of the curve.
निम्न वक्र के द्विक बिन्दुओं की स्थिति एवं प्रकृति ज्ञात करो।
 $x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$

13. If यदि $u = \log \left(\frac{x^4 + y^4}{x+4} \right)$, then prove that तो सिद्ध करो -

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} = 3.$$

14. If $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, then prove that

$$\frac{\partial (r, \theta)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{r}$$

यदि $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, हो तो सिद्ध करो -

$$\frac{\partial (r, \theta)}{\partial (x, y)} = \frac{1}{r}$$

15. Change the following integral to polar co-ordinates and evaluate-
निम्न समाकल को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तन कर ज्ञात करो -

$$\int_0^a \int_y^a \frac{x \, dx \, dy}{x^2 + y^2}$$

PART-C (Compulsory)

UNIT-I (इकाई-I)

16.(a) For any curve with usual notations, prove that
सामान्य संकेतन में किसी वक्र हेतु सिद्ध करो -

$$\sin^2 \psi \, d\psi/d\theta + r \, d^2r/ds^2 = 0$$

(b) Find all asymptotes of the following curve -

$$(x - 2y)^2 (x - 2) - 4y(x - 2y) - (8x + 7y) = 0$$

Or/अथवा

(a) Tracing following curve - निम्न वक्र का अनुरेखन करो -

$$x(x - 2a)y^2 = a^2(x - a)(x - 3a)$$

(b) Trace the following polar curve -

$$\text{निम्न ध्रुवीय वक्र का अनुरेखण करो - } r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

UNIT-II (इकाई-II)

17.(a) A circle moves with its centre on the parabola $y^2 = 4ax$ and always passes through the vertex of the parabola. Show that the envelope of the circle is the curve $x^3 + y^2(x + 2a) = 0$ एक वृत्त का केन्द्र सदैव परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है तथा यह परवलय के शीर्ष से गुजरता है। सिद्ध करो कि इस वृत्त के कुल का अन्वालोप $x^3 + y^2(x + 2a) = 0$ है।

(b) Find the minimum value of - न्यूनतम मान ज्ञात करो -
 $x^2 + y^2 + z^2$ When जबकि $ax + by + cz = p$

Or/अथवा

(a) Show that the evolute of ellipse $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ is $(a/x)^{2/3} + (b/y)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ का केन्द्रज $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ is $(a/x)^{2/3} + (b/y)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ है।

(b) Prove that - सिद्ध करो -

$$\sqrt{m} \sqrt{m + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \sqrt{2m}; m \in \mathbb{Z}$$

UNIT-III (इकाई-III)

- 18.(a) Find the area included between the curve and its asymptote of the following curve. निम्न वक्र व उसके अनन्तस्पर्शी के मध्य का क्षेत्रफल ज्ञात करो। $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$
- (b) Find the surface of the solid generated by the revolution of the astroid $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ about the x-axis
एस्ट्रायड $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ द्वारा x- अक्ष के परितः परिक्रमण से जनित धनाकृति का प्रष्टीय क्षेत्रफल ज्ञात करो।

Or/ अथवा

- (a) Taking pole as fixed point, find the intrinsic equation of the cardioid $r = a(1 - \cos \theta)$ ध्रुव को स्थिर बिन्दु मानकर कार्डियोइड $r = a(1 - \cos \theta)$ का नैज समीकरण ज्ञात करो।
- (b) Evaluate मान ज्ञात कीजिए - $\int_V x^2 dx dy dz$
When V is the region bounded by the planes
जहाँ V निम्न तलों से परिबद्ध क्षेत्रफल है
 $x = 0, y = 0, z = 0$ तथा $x + y + z = a, a > 0$