MATHEMATICS

Paper - III Mechanics

Time Allowed : Three Hours | M. M. : 75

Part-A (Compulsory) | **[Marks : 10]**

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Define (परिभाषित कीजिये) –

(a) Angle of friction. घर्षण कोण

(b) Null lines. शून्य आघूर्ण रेखाएँ

(c) Unstable equilibrium. अस्थायी सन्तुलन

(d) Equation of Null plane of a point (f, g, h).
बिन्दु (f, g, h) के शून्यआघार्ण समतल का समीकरण

(e) Normal Acceleration. अभिलाम्बिक त्वरण

(f) Simple Harmonic Motion. सरल आवर्त्त गति

(g) Terminal Velocity. अन्तिम वेग।

(h) Equation of cycloid in terms of s and y.
s व y के पदों में चक्रज का समीकरण

(i) Central orbit. संकेन्द्र कक्षा

(j) Principle of areal conservation. क्षेत्रफल संरक्षण सिद्धान्त

Part - B (Compulsory)
[भाग – ब (अनिवार्य)]

2. The moments of a given system of forces about three points (2,0), (0,2) and (2,2) are 3, 4 and 10 units respectively. Find the magnitude of the resultant force and find the equation of the line of action.
किसी दिये गये समतलीय बल निकाय के बिन्दुओं (2,0), (0,2) और (2,2) के सापेक्ष आघूर्ण क्रमशः 3, 4 व 10 इकाई हैं। परिणामी का परिमाण व क्रिया रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिये।

3. Show that shape of the common catenary is a parabola.
सिद्ध कीजिये कि सामान्य कैटिनरी की आकृति परवलय होती है।

4. If the angular velocity of a point moving in a plane curve be constant about a fixed origin, show that its transverse acceleration varies as its radial velocity. यदि किसी समतल वक्र में गतिमान बिन्दु का मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय वेग अचर हो तो सिद्ध कीजिये कि उसका अनुप्रस्थ त्वरण अरीय वेग के समानुपाती होता है।

5. A particle is moving with SHM. Its distances from the middle point of its path at three consecutive seconds are X_1, X_2, X_3. Prove that the time of a complete oscillation is :
एक SHM में पथ के मध्य बिन्दु से किसी कण की तीन उत्तरोत्तर सेकेण्डों में दूरियाँ X_1, X_2, X_3 हैं। सिद्ध कीजिये कि पूर्ण आवर्त्तकाल है:

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

$$\frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{X_1+X_3}{2X_2}}$$

6. A particle describes the curve $r^2 = 2ap$ under a central force where pole is the centre of force. Find the law of force. एक कण केन्द्रीय बल के अधीन वक्र $r^2 = 2ap$ में गमन करता है जहाँ ध्रुव बल केन्द्र है। बल नियम ज्ञात कीजिये।

Part-C (भाग–स)

Unit - I (इकाई–I)

7. (a) A uniform rod can turn freely about one of its ends is pulled aside from the vertical by a horizontal force acting at the other end of the rod and equal to half of its weight. At what inclination to the vertical will the rod rest? एक एकसमान छड़ एक सिरे के सापेक्ष स्वतंत्रतापूर्वक घूम सकती है। छड़ के दूसरे सिरे को एक क्षैतिज बल लगाकर खींचा जाता है। लगाये गये बल का परिमाण छड़ के भार का आधा है। ज्ञात कीजिये कि सन्तुलन की अवस्था में छड़ ऊर्ध्वाधर से कितना कोण बनाती है?

(b) A ladder whose C.G. divides it into two positions of lengths a and b, rest with one end on a rough horizontal floor and the other end against a rough vertical wall. If the coefficient of friction at the floor and the wall be respectively μ and μ', show that the inclination of the ladder to the floor, when equilibrium is limiting, is:
एक सीढ़ी का गुरुत्व केन्द्र इसे दो भागों a और b में बाँटता है। सीढ़ी का एक सिरा रूक्ष क्षैतिज फर्श पर तथा दूसरा रूक्ष ऊर्ध्वाधर दीवार पर टिका है। यदि फर्श तथा दीवार का घर्षण गुणांक क्रमशः μ और μ' हो तो प्रदर्शित कीजिये कि सीमान्त सन्तुलन में सीढ़ी का फर्श से झुकाव है:

$$\tan^{-1}\left[\frac{a-b\mu\mu'}{\mu(a+b)}\right]$$

8. (a) Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pully of radius a so as to be in contact with two third of the circumference of the pully is: प्रदर्शित कीजिये कि बिना सिरे की बंद जंजीर जो त्रिज्या a की एक वृत्ताकार घिरनी के दो तिहाई भाग के सम्पर्क में है, तो उसकी लम्बाई होगी: $a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}\right]$

(b) Six equal heavy beams of weight W each are freely jointed at their

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

ends to form a hexagon and are placed in vertical plane with one beam resting on a horizontal plane, the middle points of the two upper slant beams, which are inclined at an angle θ to the horizon, are connected by a light cord, find the tension in the string in terms of W and θ.

W भार के छः समान भारी दण्ड स्वच्छन्दतापूर्वक स्वयं के सिरों पर इस प्रकार जुड़े हैं कि एक षट्भुज बने और यह उर्ध्वाधर समतल में इस प्रकार रखा गया है कि एक दण्ड क्षैतिज समतल पर रहे। ऊपरी तिरछे दो दण्डों के मध्य बिन्दुओं को, जो क्षैतिज से θ कोण पर झुके हैं, पर भारहीन डोरी द्वारा जोड़ा जाता है। W व θ के पदों में डोरी में तनाव ज्ञात कीजिये।

Unit - II (इकाई–II)

9. (a) A particle of mass m moving in a straight line is acted upon by an attractive force which is expressed by $\frac{m\mu X}{a}$ for $X < a$ and by $\frac{m\mu a^2}{X^2}$ for $X > a$ from a fixed origin in the line. If the particle starts from rest at a distance 2a from the origin. Prove that it will reach the origin with a velocity $\sqrt{2\mu a}$.

m संहति के कण पर जो सरल रेखा में चल रहा है, जब $X < a$ तो एक आकर्षी बल $\frac{m\mu X}{a}$ कार्य करता है और जब $X > a$ तो बल $\frac{m\mu a^2}{X^2}$ कार्य करता है, जहाँ दोनों अवस्थाओं में X सरल रेखा में किसी स्थिर मूल बिन्दु से कण की दूरी है। यदि कण मूल बिन्दु से 2a दूरी पर विरामावस्था से रवाना हो तो सिद्ध कीजिये कि वह मूल बिन्दु पर $\sqrt{2\mu a}$ वेग से पहुँचेगा।

(b) A particle of mass m hangs from a fixed point by a light string and is given a small vertical displacement. If *l* is the length of the string in equilibrium position and *n* the number of oscillations per second, show that the natural leng h of the string is $\left(1-\frac{g}{4\pi^2 n^2}\right)$.

m द्रव्यमान एक एक कण हल्की डोरी द्वारा एक स्थिर बिन्दु से लटका हुआ है तथा इसे लघु ऊर्ध्वाधर विस्थापन दिया गया है। यदि सन्तुलन की अवस्था में डोरी की लम्बाई *l* है तथा दोलन आवृत्ति *n* प्रति सेकेण्ड हो तो सिद्ध कीजिये कि डोरी की स्वाभाविक लम्बाई $\left(1-\frac{g}{4\pi^2 n^2}\right)$ होगी।

10. A heavy particle is projected vertically upwards in a medium, the

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

resistance of which varies as the square of the velocity. It has a kinetic energy k, when it passes the same point on the way down, show that the loss of kinetic energy is $\frac{k_1^2}{k_1 + k_2}$ where k_2, is the limit to which the energy approached in its downward course.

एक भारी कण वेग के वेग से समानुपाती प्रतिरोध उत्पन्न करने वाले माध्यम में ऊर्ध्वाधर दिशा में ऊपर की ओर फेंका जाता है। यदि अपने पथ में किसी बिन्दु पर इसकी गतिज ऊर्जा k_1 है तो सिद्ध कीजिये कि जब वह अपने पथ की ओर गिरता हुआ उस बिन्दु से गुजरता है तो उसमें ऊर्जा का ह्रास $\frac{k_1^2}{k_1 + k_2}$ होगा, जहाँ k_2 उसकी नीचे की ओर गिरते समय अन्तिम ऊर्जा है।

Unit - III (इकाई–III)

11. (a) A particle is projected along the inner surface of a smooth vertical circle of radius a, its velocity at the lowest point being $\frac{1}{5}\sqrt{(95)ag}$. Show that it will leave the circle at an angular distance $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ from the highest point and its velocity then is $\sqrt{\frac{3}{5}ag}$.

कोई ऋण a त्रिज्या के चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त के अन्तः तल के साथ वृत्त के सबसे नीचे के बिन्दु से $\frac{1}{5}\sqrt{(95)ag}$ वेग से फेंका जाता है। सिद्ध कीजिये कि यह सर्वोच्च बिन्दु से $\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ कोणीय दूरी पर वृत्त से सम्पर्क छोड़ देगा और उस समय उसका वेग $\sqrt{\frac{3}{5}ag}$ होगा।

(b) A particle starts from the vertex of a cycloid whose axis is vertical and vertex upwards. Prove that it will leave the curve when it is moving in a direction making with the horizontal at an angle 45°.

एक कण ऐसे चक्रज के शीर्ष से विरामावस्था से रवाना होता है जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष ऊपर है। सिद्ध कीजिये कि वह वक्र से सम्पर्क तब छोड़ेगा जब वह क्षैतिज से 45^0 का कोण बनाते हुए गतिमान हो।

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

2. (a) If two equal and perfectly smooth elastic spheres, impinge obliquely, prove that they interchange their velocities resolved in the direction of the line of centres.

यदि दो समान एवं पूर्णतः प्रत्यास्थ गोले तिर्यक टकराते हैं तो सिद्ध कीजिये कि केन्द्रीय रेखा के दिशा में वे अपने वेग बदलेंगे।

(b) If v_1 and v_2 are velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun, prove that $(1-e)\,v_1 = (1+e)\,v_2$.

यदि v_1 और v_2 किसी ग्रह के उस समय वेग हों जबकि वह सूर्य से क्रमशः न्यूनतम और अधिकतम दूरियों पर है तो सिद्ध कीजिये कि $(1-e)\,v_1 = (1+e)\,v_2$.

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner