MATHEMATICS

Paper - III : Mechanics

Time Allowed :- Three Hours **Maximum Marks : 100**

Part-A (Compulsory) **[Marks : 10]**

भाग- अ (अनिवार्य)

1. (a) Write kinds of friction. घर्षण के प्रकार लिखिये।

   (b) Write the principle of virtual work of system of coplanar forces acting on a particle. किसी कण पर क्रियाशील समतलीय बल-निकाय के लिए कल्पित कार्य सिद्धान्त लिखिये।

   (c) Write the parametric equations of the catenary.
   कैटिनरी के प्राचल समीकरण लिखिये।

   (d) If a particle moves in a circular path, then write its radial and transversal acceleration.
   जब कण वृत्तीय पथ में चले तो उसके अरीय एवं अनुप्रस्थ त्वरण लिखिये।

   (e) Write the equation of motion of a particle falling under gravity of Earth.
   पृथ्वी के गुरूत्वाकर्षण के अधीन गिरने वाले कण की गति का समीकरण लिखिये।

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

(f) A particle of mass m falls under gravity through a medium whose resistance varies as the square of velocity v. Write the equation of motion. m द्रव्यमान का एक कण गुरूत्वाकर्षण के अधीन ऐसे माध्यम में होकर गिरता है जिसका प्रतिरोध वेग v के वर्गानुपाती है। गति का समीकरण लिखिये।

(g) Define an Apse. स्तब्धिका को परिभाषित कीजिये।

(h) Write the Pedal form of central orbit.
सकेन्द्र कक्षा का पदिक रूप लिखिये।

(i) Write Kepler's third law of planetary motion.
ग्रहीय गति हेतु केपलर का तृतीय नियम लिखिये।

(j) Write Newton's experimental law of impact.
न्यूटन का प्रयोगात्मक संघट्ट नियम लिखिये।

Part - B (Compulsory)
[भाग – ब (अनिवार्य)]

2. A rope of length $2l$ meters is usspended from two points at the same level and the lowest point of the rope is b meter below the point of suspension. Show that the horizontal component of the tension is $\frac{w\left(l^2-b^2\right)}{2b}$, w being the weight of the rope per meter of its length.
एक $2l$ मीटर रस्सा एक ही ऊँचाई के दो बिन्दुओं से लटका हुआ है तथा रस्से का निम्नतम बिन्दु लटकाने वाले बिन्दुओं से b मीटर नीचे है। सिद्ध कीजिये कि रस्से के तनाव क्षैतिज घटक $\frac{w\left(l^2-b^2\right)}{2b}$ जहाँ w प्रति मीटर लम्बाई का भार है।

3. A particle describes the curve $r = ae^{\theta}$ with constant angular velocity. Show that its radial acceleration is zero and transverse acceleration varies as its distance from the pole.
एक कण समानकोणिक सर्पिल $r = ae^{\theta}$ में गमन करता है। यदि इसका कोणीय वेग अचर हो तो सिद्ध कीजिये कि इसका अरीय त्वरण शून्य है तथा अनुप्रस्थ त्वरण इसकी ध्रुव से दूरी के समानुपाती है।

4. A horizontal shelf is moved up and down with SHM of peiod ½ second. What is the greatest amplitude admissible in order that book placed on the shelf may not be jerked off.
एक क्षैतिज पटल 1/2 सेकेण्ड आवर्तकाल वाली SHM में ऊर्ध्वाधर दिशा में चल रहा है। इसका अधिकतम आयाम ज्ञात कीजिये जिससे उस पर रखी हुई कोई पुस्तक सर्वदा इसके सम्पर्क में रह सके।

5. A particle is moving on a smooth curve and its velocity varies as the

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

arcual distance from the highest point. Prove that the curve is a cycloid. एक कण गुरूत्वाकर्षण के अधीन किसी चिकने वक्र पर चलता है और उसका वेग उसके सर्वोच्च बिन्दु से चापीय दूरी के समानुपाती है। सिद्ध कीजिये कि वक्र एक चक्रज है।

6. A particle describes the curve $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ under s central force where pole is the centre of force. Find the law of the force.

एक कण वक्र $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ में केन्द्रीय बल के अधीन गमन करता है, जहाँ ध्रुव बल केन्द्र है। बल नियम ज्ञात कीजिये।

Part-C (भाग–स)
Unit-I (इकाई–I)

7. (a) A uniform rectangular board, whose sides are $2a$ and $2b$, rests in limiting equilibrium in contact, with two rough pegs in the same horizontal line at a distance d apart. Show that the inclination θ of the side $2a$ to the horizontal is given by the following equation, where λ is the angle of friction :

$2a$ तथा $2b$ भुजाओं वाला एकसमान आयतीय बोर्ड क्षैतिज रेखा पर d दूरी पर स्थित दो रूक्ष खूंटियों पर सीमान्त साम्यावस्था में है। प्रदर्शित कीजिये कि भुजा $2a$ का क्षैतिज से झुकाव θ निम्न समीकरण से प्राप्त होगा, जहाँ λ घर्षण कोण है:

$$d\cos\lambda\cos(\lambda + 2\theta) = a\cos\theta - b\sin\theta$$

(b) A square lamina rests with its plane perpendicular to a smooth wall, one corner being attached to a point in the wall by a fine string of length equal to the side of the square. Find the positions of equilibrium and show that it is stable.

एक वर्ग पट्ल का तल एक चिकनी दीवार के लम्बवत है। वर्ग का एक कोना इसकी भुजा के समान लम्बाई की डोरी से दीवार में एक बिन्दु से टंगा है। सन्तुलन की स्थिति ज्ञात कीजिये तथा प्रदर्शित कीजिये कि सन्तुलन स्थायी है।

8. (a) A rhombus is formed of rods each of weight W and length l with smooth joints. It rests symmetrically with its two uper sides in contact with two smooth pegs at the same level and at a distance $2a$ apart. A weight W' is hung at the lowest point. If the sides of the rhombus make an angle θ with the vertical, prove that:

चिकने कब्जों से छडों का एक समचतुर्भुज बनाया जाता है जिसमें प्रत्येक छड का भार W और लम्बाई l है। यह सममितत: इस प्रकार रखा जाता है कि इसकी ऊपर की दो भुजाएँ एक ही स्तर पर स्थित दो चिकनी खूँटियों के सम्पर्क में रहें, दोनों खूँटियों के बीच की दूरी $2a$ है। एक भार W' निम्नतम बिन्दु पर लटकाया जाता है।

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

यदि समचतुर्भुज की भुजाएँ ऊर्ध्वाधर से कोण θ बनाती है तो सिद्ध कीजिये:

$$\sin^3\theta = \frac{a(4W + W')}{l(4W + 2W')}$$

(b) A uniform string of weight W is suspended from two points at the same level and a weight W' is attached at the lowest point. If α and β be the inclinations to the horizontal of the tangents at the highest and the lowest points, prove that :

W भार की एकसमान रस्सी समान स्तर के दो बिन्दुओं के मध्य लटकी हुई है, जिसके निम्नतम बिन्दु पर एक भार W' लगा रखा है। यदि उच्च एवं निम्न बिन्दु पर स्पर्श रेखाएँ क्षैतिज से झुकाव कोण α तथा β हों, तो सिद्ध कीजिये :

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = 1 + \frac{W}{W'}$$

Unit -II (इकाई – II)

9. (a) A particle moves in the curve $y = a\,\text{logsec}\left(\frac{x}{a}\right)$ in such a way that the tangent to the curve rotates uniformly. Prove that the resultant acceleration of the particle varies as the square root of the radius of curvature.

एक कण वक्र $y = a\,\text{logsec}\left(\frac{x}{a}\right)$ में इस प्रकार गमन करता है कि इसकी स्पर्श रेखा एकसमान दर से घूमती है। सिद्ध कीजिये कि कण का परिणामी त्वरण इसकी वक्रता त्रिज्या के वर्ग के समानुपाती होता है।

(b) A particle moves in a straight line. Its acceleration, directed towards a fixed point o in the line, is equal to $\mu\left(\frac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$, when it is at a distance x from o. If it starts from reset at a distance a from o, show that it will arrive at c with a velocity $a\sqrt{(6\mu)}$ after time $\frac{8}{15}\sqrt{\frac{6}{\mu}}$.

एक कण एक सरल रेखा में गतिमान है। उसका त्वरण रेखा में स्थित एक स्थिर बिन्दु o की ओर इंगित है और जब कोण की दूरी o से x है तो उसका त्वरण $\mu\left(\frac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$ है। यदि कण o से a दूरी पर से विरामावस्था से चलता हो तो सिद्ध

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

कीजिये कि वह o पर $a\sqrt{(6\mu)}$ वेग से $\frac{8}{15}\sqrt{\frac{6}{\mu}}$ समय पश्चात् पहुँचेगा।

10. (a) A light elastic string of λ modulus and natural length a is streatched to double its natural length and is tied to two fixed points distance $2a$ apart. A particle of mass m, tied to its mid point, is displaced in the line of the string through a distance equal to half of its distance from the fixed point and released. Prove that the time of an oscillation is $\pi\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$ and its maximum velocity is $\sqrt{\frac{a\lambda}{m}}$.

एक भारहीन डोरी जिसका प्रत्यास्थ मापांक λ है, अपनी स्वाभाविक लम्बाई a के दुगने तक बढाई जाती है, फिर परस्पर $2a$ दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से बांध दी जाती है। तत्पश्चात् m संहति के एक करण को डोरी के मध्य बिन्दु पर बांध कर डोरी की दिशा में स्थित बिन्दुओं के बीच की आधी दूरी तक विस्थापित करके छोड़ दिया जाता है। सिद्ध कीजिये कि कण का दोलनकाल $\pi\sqrt{\frac{am}{\lambda}}$ है और इसका अधिकतम वेग $\sqrt{\frac{a\lambda}{m}}$ है।

(b) A light elastic string of natural length l and modulus of elasticity λ is hung by one end and to the other end is tied a particle of mass m. Discuss the motion.

स्वाभाविक लम्बाई l की एक हल्बकी प्रत्यास्थ डोरी जिसका प्रत्यास्थ मापांक λ है, एक सिरे से लटकी है और दूसरे सिरे पर m द्रव्यमान का एक कण बंधा है। कण की गति की विवेचना कीजिये।

Unit -III (इकाई – III)

11. (a) A particle is projected from the lowest point of a vertical circle with a velocity just sufficient to carry it to the highest point. Find when and where the particle will leave the circle. एक कण ऊर्ध्वाधर वृत्त के निम्नतम बिन्दु से ऐसे वेग से फेंका जाता है जो उसे ठीक सर्वोच्च ब्रिन्दु तक ले जा सके। ज्ञात कीजिये कि कण वृत्त को कब और कहाँ छोड़ेगा।

(b) A particle slides down a smooth cycloid starting from rest at the cusp, the axis being vertical and vertex downwards. Prove that it describes half of the path to the lowest point in two thirds time to the lowest point. एक कण एक ऐसे चिकने चक्रज के चाप पर नीचे की ओर फिसलता है जिसकी अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष निम्नतम है। यदि कण उभयाग्र से

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

विरामावस्था से चलता हो तो सिद्ध कीजिये कि उसके शीर्ष तक के प्रथम आधे पथ के चलने का समय उसके शीर्ष तक पहुँचने के समय का दो तिहाई होगा।

12. (a) A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance a from the origin with velocity which is $\sqrt{2}$ times the velocity for a circle of radius a. Show that the equation to its path is $r \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$.

एक कण केन्द्रीय त्वरण के अन्तर्गत गतिमान है, जो मूल बिन्दु से दूरी a के घन के व्युत्क्रमानुपाती है। यदि इसे मूल बिन्दु से a दूरी पर स्थित स्तब्धिका से ऐसे वेग से फेंका जाता है जो a त्रिज्या वाले वृत्त के लिये वेग का $\sqrt{2}$ गुणा है, तो सिद्ध कीजिये कि पथ का समीकरण $r \cos\left(\frac{\theta}{\sqrt{2}}\right) = a$ है।

(b) Two equal spheres of elasticity e impinge, having before impact velocities u_1, v_1 in the directions of the common normal and u_2, v_2 perpendicular to this normal. If after impact, the spheres move perpendicularly, to each other show that:

e प्रत्यास्थता गुणांक वाली दो समान गेंदें परस्पर टकराती है। टक्कर के पहले उभयनिष्ठ अभिलम्ब की दिशा में उनके वेग u_1 तथा v_1 है तथा उसके समकोण दिशा में u_1 तथा v_1 हैं। यदि टक्कर के पश्चात् उनके वेग परस्पर लम्ब हों तो सिद्ध कीजिये:

$$(u_1 + v_1)^2 + 4 u_2 v_2 = e^2 (u_1 - v_1)^2$$

Questionpapersuit.com

Scanned by CamScanner