
MATHEMATICS **Paper - III Vector Calculus and Geometry**

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Show that: $\nabla r^r = -3r^5 \vec{r}$, where $\vec{r} = \vec{x} i + \vec{y} j + \vec{z} k$

दिखाइये $\nabla r^r = -3r^5 \vec{r}$, जहाँ $\vec{r} = \vec{x} i + \vec{y} j + \vec{z} k$

2. Prove that : सिद्ध कीजिये : $\operatorname{div} \operatorname{curl} \vec{A} = 0$
3. Show that : $\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = -4\pi \int p dV$, where $\vec{F} = \nabla\phi$ and $\nabla^2\phi = -4\pi p$
दिखाइये : $\int \vec{F} \cdot d\vec{S} = -4\pi \int p dV$, जहाँ $\vec{F} = \nabla\phi$ तथा $\nabla^2\phi = -4\pi p$
4. Give the statement of Green's theorem. ग्रीन प्रमेय का कथन दीजिये।
5. Write the equation of the conic in its simplest form.
शांकव की समीकरण का सरलतम रूप लिखिये।
6. Find the eccentricity of the conic $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$.
शांकव $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिये।
7. Define the angle of intersection of two spheres.
दो गोलों के प्रतिच्छेद कोण को परिभाषित कीजिये।
8. Write the condition for three mutually perpendicular generations of cone.
शंकु की तीन परस्पर समकोणिक जनक रेखाओं का प्रतिबन्ध लिखिये।
9. Define polar plane of a point for conicoid.
शांकवज के लिए एक बिन्दु का घुर्वीय तल को परिभाषित कीजिये।
10. Define Diametral Plane and find the equation for it.
व्यासग तल को परिभाषित कीजिये तथा इसकी समीकरण ज्ञात कीजिये।

Part - B (Compulsory)

भाग- ब (अनिवार्य)

11. Prove that : सिद्ध कीजिये :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$
12. Prove that the length of the semi axis of the conic $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ are $\sqrt{d/(a+b)}$ and $\sqrt{d/(a-b)}$ respectively and their combined equation is $x^2 - y^2 = 0$.
 सिद्ध कीजिये कि शांकव $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ की अर्द्ध अक्षों की लम्बाइयाँ क्रमशः $\sqrt{d/(a+b)}$ तथा $\sqrt{d/(a-b)}$ हैं तथा इनकी संयुक्त समीकरण $x^2 - y^2 = 0$ है।
13. Two spheres of radii r_1 and r_2 cut orthogonally; prove that the radius of their common circle is :
 r_1 और r_2 त्रिज्या के दो गोले लाम्बित रूप से कटते हैं। सिद्ध कीजिये कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या है:

$$r_1 r_2 / \sqrt{(r_1^2 + r_2^2)}$$

14. Show that the centres of sections of a central conicoid that pass through a given line lie on a conic.

प्रदर्शित कीजिये कि एक केन्द्रीय शांकवज के परिच्छेद के केन्द्र जो एक दी गई रेखा से गुजरते हैं, एक शांकवज पर स्थित होते हैं।

15. Show that the planes $lx + my + p = 0$ and $l^1x + m^1y + p^1 = 0$ are conjugate diametral planes of the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$ if

$$\frac{ll^1}{a} + \frac{mm^1}{b} = 0.$$

प्रदर्शित कीजिये कि समतल $lx + my + p = 0$ तथा $l^1x + m^1y + p^1 = 0$ परवलज

$$ax^2 + by^2 = 2cz$$
 के संयुगमी व्यासग तल हैं: यदि $\frac{ll^1}{a} + \frac{mm^1}{b} = 0$

Part-C (भाग-स)

Unit-I (इकाई-I)

16. (a) The necessary and sufficient condition for the vector $a(t)$ to have constant direction is :

किसी सदिश $a(t)$ की दिशा अचर होने का आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है:

$$a \times \frac{da}{dt} = 0$$

- (b) Prove that : $\nabla(a.b) = (b. \nabla)a + (a. \nabla)b + b \times (\nabla \times a) + a \times (\nabla \times b)$
where a and b are differentiable vector point functions.

सिद्ध कीजिये : $\nabla(a.b) = (b. \nabla)a + (a. \nabla)b + b \times (\nabla \times a) + a \times (\nabla \times b)$
जहाँ a तथा b अवकलनीय सदिश बिन्दु फलन हैं।

17. (a) Prove that: सिद्ध कीजिये:

$$\int \frac{dV}{r^2} = \int \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} dS$$

- (b) Find the area of the loop of the Folium of Descartes $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

फोलियम $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$ के लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये।

Unit-II (इकाई-II)

18. Find the nature of the conic represented by the equation $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ and trace it also.

समीकरण $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$ द्वारा प्रदर्शित शांकव की प्रकृति ज्ञात कीजिये एवं इसका अनुरेखन कीजिये।

19. (a) Find the condition that the straight line $1/r = A \cos \theta + B \sin \theta$ may pass through the circle $r = 2a \cos \theta$.

4013

वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिये जबकि सरल रेखा $\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ वृत्त $r = 2a \cos \theta$ को स्पर्श करें।

- (b) If any tangent plane to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ cuts the coordinate axes at A, B, C respectively, then prove that the locus of the point of intersection of the planes drawn parallel to the coordinate planes through A, B, C is :

गोले $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ के किसी बिन्दु पर खींचा गया स्पर्श समतल निर्देशी अक्षों को A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिये कि A, B, C से निर्देशी समतलों के समान्तर खींचे गये समतलों के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ है:

$$x^{-2} + y^{-2} + z^{-2} = r^{-2}$$

Unit-III (इकाई-III)

20. (a) Find the enveloping cone of the shere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ with its vertex at (1, 1, 1).

गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ के उस अन्वालोपी शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसका शीर्ष बिन्दु (1, 1, 1) है।

- (b) Find the equation of cylinder whose generators are parallel to the line

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3} \text{ and whose guiding curve is the ellipse } x^2 + 2y^2 = 1, z = 3.$$

उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसकी जनक रेखाएँ $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ के समान्तर हैं तथा जिसका निर्देशक वक्र दीर्घवृत्त $x^2 + 2y^2 = 1, z = 3$ है।

21. (a) Find the locus of the centres of the sections of $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ which touch $ax^2 + \beta y^2 + cz^2 = 1$.

$ax^2 + \beta y^2 + cz^2 = 1$ को स्पर्श करने वाले $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के परिच्छेद के केन्द्र का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये।

- (b) Prove that the axes of the section of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ by the plane $lx + my + nz = 0$ lie on the cone.

शंकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को समतल $lx + my + nz = 0$ से काटने पर परिच्छेद के अक्ष निम्न शंकु पर स्थित होते हैं:

$$\frac{(b-c)l}{x} = \frac{(c-a)m}{y} = \frac{(a-b)n}{z}$$