

## MATHEMATICS

### Paper- III : Vector Calculus and Geometry)

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

#### Part-A (Compulsory)

[Marks : 10]

1. Write the combined equation of asymptotes of conic,  
$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

शंकाव  $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$  के अन्तर्गत स्पर्शियों का संयुक्त समीकरण लिखिये।
2. Trace the parabole  $l/r = 1 + \cos\theta$   
परवलय  $l/r = 1 + \cos\theta$  का अनुरेखण कीजिये।
3. Write the equation of the polar at any point  $(r_1, \theta_1)$  with respect to  
conic  $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos\theta$

शंकाव  $(r_1, \theta_1)$  के सापेक्ष बिन्दु  $\frac{\ell}{r} = 1 + e \cos\theta$  की ध्रुवी का समीकरण लिखिए।

4. Write the co-ordinate of pole of the plane  $lx + my + nz = p$  w.r. to sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$   
समतल  $lx + my + nz = p$  w.r. का गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  के सापेक्ष ध्रुव के निर्देशांक लिखिए।
5. Find the semi verticle angle of right circular cone  $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$   
लम्बवृत्तीय शंकु  $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2\alpha$  का अर्ध शीर्ष कोण ज्ञात कीजिये।

6. Define enveloping cylinder. अन्वालोपी बेलन की परिभाषा लिखिए।
7. Define conjugate diametral plane.
8. Show that vector  $\mathbf{f} = (x+y) \mathbf{i} + (y-3z) \mathbf{k} + (x-2z)\mathbf{k}$  is solenoidal.  
बताइये कि सदिश  $\mathbf{f} = (x+y) \mathbf{i} + (y-3z) \mathbf{k} + (x-2z)\mathbf{k}$  एक परिनालकीय है।
9. Show  $\operatorname{curl} \operatorname{grad} u = 0$ . सिद्ध कीजिए कि  $\operatorname{grad} u = 0$ .
10. Write the Green's theorem. ग्रीन प्रमेय का कथन लिखिए।

### Part-B (Compulsory)

11. Find the equation of axes of conic  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$ .  
शंकाव  $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 1$  के अक्षों के समीकरण ज्ञात कीजिए।
12. Find the centre and radius of circles -  
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 11$ ,  $x + 2y + 2z = 15$   
वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z = 11$ ,  $x + 2y + 2z = 15$  का केंद्र व  
त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
13. Find the equation of planes which contain the line -  
 $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  and touches  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$   
उन समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  गुजरते हैं तथा दीर्घवृत्तज  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$  को स्पर्श करते हैं।
14. If  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$  and  $r = |\mathbf{r}|$ ; then prove that -  
 $\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = (n+3)r^{n-1}$  यदि  $\mathbf{r} = xi + yj + zk$  तथा  $r = |\mathbf{r}|$ ; तो  
सिद्ध कीजिए -  $\operatorname{div} r^n \mathbf{r} = (n+3)r^{n-1}$
15. Use Cartesian form of Gauss's Divergence theorem to evaluate  
 $\int\int\int \{(2xy + z^3) dydz + 3xz^2 dx dy\}$ ,  
where  $S$  is surface of cube bounded by co-ordinate plane and plane  
 $x = y = z = 1$ . गोस प्रमेय के कार्तीय रूप का प्रयोग करते हुए मान ज्ञात कीजिए  
 $\int\int\int \{(2xy + z^3) dydz + 3xz^2 dx dy\}$ , जहाँ  $S$  उस घन का पृष्ठ से जो निर्देशी  
समतलों तथा समतल  $x = y = z = 1$  से परिबद्ध है।

### Part-C (भाग-स)

16. Trace the curve  $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$   
वक्र  $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$  का अनुरेखन कीजिए।

Or/ अथवा

- (a) Find the condition that the straight line  $1/r A \cos \theta + B \cos \theta$  may touch the circle  $r = 2a \cos \theta$   
वृत्त प्रतिबंध ज्ञात कीजिए जबकि सरल रेखा  $1/r A \cos \theta + B \cos \theta$  वृत्त  $r = 2a \cos \theta$  को स्पर्श करे।
- (b) Find the locus of pole of a chord of conic  $1/r = 1 + e \cos \theta$  which stands a constant angle  $2\alpha$  at the locus.

## UNIT-II (इकाई-II)

17.(a)

- A sphere of constant radius  $2k$ , passes through the origin and meets the axes in A, B, C. Show that the locus of centroid of the tetrahedron is  $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$

अचर त्रिज्या  $2k$  का एक गोला मूल बिन्दु 0 से गुजरता है और निर्देशी अक्षों क्रमशः A, B, C पर काटता है। सिद्ध कीजिये कि चतुष्फलक के केन्द्र का बिन्दुपथ  $x^2 + y^2 + z^2 = k^2$  है।

(b)

- Find the equation of a right circular cylinder whose axis is  $x-2/2 = y-1/1 = z/3$  and which passes through (0,0,1)

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अक्ष  $x-2/2 = y-1/1 = z/3$  है तथा जो बिन्दु (0,0,1) से गुजरता है।

**Or/ अथवा**

(a)

- Prove that the locus of poles of tangent planes of  $ax^2 + by^2 + cy^2 = 1$  w.r. to  $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma^2 = 1$  is  $a^2x^2/a + \beta^2y^2/b + \lambda^2z^2/c = 1$   
सिद्ध कीजिए कि  $ax^2 + by^2 + cy^2 = 1$  के सापेक्ष  $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma^2 = 1$  को स्पर्श तलों के ध्रुवों का बिन्दुपथ  $a^2x^2/a + \beta^2y^2/b + \lambda^2z^2/c = 1$  होगा।

(b)

- Prove that the feet of six normal's form ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) to the ellipsoid lie  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  lie on the curve of intersection of the ellipsoid and the cone  $\sum a^2(b^2 - c^2)/x = 0$ .

सिद्ध कीजिए कि ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) से दीर्घवृत्तज  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$  पर खीर्ची छ: अभिलम्बों के पाद दीर्घवृत्तज तथा शंकु  $\sum a^2(b^2 - c^2)/x = 0$  के प्रतिच्छेद वक्र पर स्थित हैं।

## UNIT-III (इकाई-III)

18.(a)

- Verify Gauss's Divergence theorem and show that -

$\int F \cdot n \, ds = 1/3a^5$ , where  $F = (x^3 - yz)i - 2x^2yj + 2k$  and S is the surface of the cube bounded by co-ordinate planes  $x = y = z = 0; x = y = z = a$ .

गास प्रमेय को सत्यापित करते हुए दर्शाइये कि  $\int F \cdot n \, ds = 1/3a^5$  जहाँ  $F = (x^3 - yz)i - 2x^2yj + 2k$  तथा S निम्न निर्देशांक समतलों द्वारा परिबद्ध का पृष्ठ है  $x = y = z = 0; x = y = z = a$

**Or/ अथवा**

(a)

- Verify Stoke's theorem for function  $F = x^2i + xyz$  integrated round the square in plane  $z = 0$ , whose sides are along the line  $x = y = 0$  and  $x = y = a$ .

फलन  $F = x^2i + xyz$  के लिए स्टॉक प्रमेय का सत्यापन कीजिए, जहाँ F का समाकलन तल  $z = 0$  में स्थित वर्ग के चारों ओर किया गया है, जिसकी भुजाएँ रेखा  $x = y = 0$  तथा  $x = y = a$  के अनुदिश हैं।