B.A./B.Sc. (Part-III) EXAMINATION, 2015

MATHEMATICS

Paper- I : Abstract Algebra

Time : Three Hours **M.M. : 75/66**

Part-A (Compulsory) **[Marks : 15]**

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Define characteristics of a Ring. वलय के अभिलक्षण की परिभाषा दीजिये।
2. Define Maximal Ideal. उच्चिष्ठ गुणजावली की परिभाषा दीजिये।

3. Write the defination of Eucl idean Ring.
यूक्लिडीय वलय की परिभाषा लिखिये।

4. Write the defination of Vector Subspace.
सदिश उपसमष्टि की परिभाषा दीजिये।

5. Write the defination of Coset. सह–समुच्चय की परिभाषा लिखिये।

6. Define Linear Transformation. रैखिक रूपान्तरण की परिभाषा लिखिये।

7. Write the defination of Annihilator. शून्यकारी की परिभाषा लिखिये।

8. Define Similar Matrices. समरूप मैट्रिसेज की परीभाषा दीजिये।

9. Define Eigenvalue and Eigenvector.
आइगेन मान तथा आइगेन सदिश की परिभाषा दीजिये।

10. Write the definition of Diagonalizable Matrix.
विकर्णीय मैट्रिक्स की परिभाषा लिखिये।

Part-B (भाग–ब)

11. If $(R, +x)$ is a ring such that $a^2 + a, \forall a \varepsilon R$, then prove that :
यदि $(R, +x)$ एक ऐसा वलय हो कि $a^2 + a, \forall a \varepsilon R$, तो सिद्व कीजिये कि: $a + a = 0$

12. If $f(x) = 2 + 5x + 3x^2$ and $g(x) = 1 + 4x + 2x^3$ are two polynomials over the ring $(z_6 +_6 x_6)$; then find,
यदि वलय $(z_6 +_6 x_6)$ में $f(x) = 2 + 5x + 3x^2$ तथा $g(x) = 1 + 4x + 2x^3$ कोई दो बहुलक हैं तो ज्ञात कीजिये। $f(x).g(x)$

13. Prove that the intersection of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space $V(F)$ is also a subspace of $V(F)$
सिद्व कीजिये कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ W_1 तथा W_2 का सर्वनिष्ठ भी $V(F)$ की एक उपसमष्टि होती है।

14. Prove that the mapping $t = V_2(R) \rightarrow V_3(R)$ which is defined by $t(a, b) = (a, b, 0)$ is a linear transformation from V_2 to V_3.
सिद्व कीजिये कि प्रतिचित्रण $t = V_2(R) \rightarrow V_3(R)$) जो $t(a, b) = (a, b, 0)$ से परिभाषित है V_2 से V_3 पर एक रैखिक रूपान्तरण है।

15. Show that the elgenvalues of an idempotent matrix are either zero or unity.
सिद्व कीजिये कि एक वर्गसम मैट्रिक्स के आइगेनमान या तो शून्य या इकाई होते हैं।

Part-C (भाग–स)

Unit-I (इकाई–I)

16. (a) Define unit elements in a ring with unity. Also prove that the set of all units in ring with unity forms multiplicative group.
तत्समकी रिंग में एकक अवयव की परिभाषा दीजिये तथा सिद्व कीजिये कि किसी तत्समकी वलय के एककों का समुच्चय एक गुणात्मक ग्रुप होता है।

(b) Prove that the set $S = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in Q\}$ is subfield of the field (R,+

x) of real numbers.

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{a + b\sqrt{2} | a, b \varepsilon Q\}$ वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र (R,+x)का एक उपक्षेत्र है।

17. (a) Define greatest common divisor. Also let R be a Euclidean ring, a, b non-zero elements in R, then prove that a and b have greatest common divisor d which can be expressed in the form $d = \lambda a + \mu b$ for some $\lambda, \mu \varepsilon R$.

महत्तम सार्वभाजक की परिभाषा दीजिये तथा माना R एक यूक्लिडीय वलय है a, b R के अशून्य अवयव हैं तो सिद्ध कीजिये कि a तथा b का महत्तम सार्वभाजक d है जिसे किन्हीं $\lambda, \mu \varepsilon R$ के लिये $d = \lambda a + \mu b$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(b) Define degree of a polynomial. Also let $f(x)$ and $g(x)$ be two non-zero polymials over a ring R, then prove that :

बहुपद की घात को परिभाषित कीजिये तथा माना एक वलय R में $f(x)$ तथा $g(x)$ दो शून्येत्तर बहुपद हैं, तो सिद्ध कीजिये :

(i) $deg\,[f(x) + g(x)] \leq Max.\,[deg.\,f(x), deg.\,g(x)]$

(ii) $deg.[f(x).\,g(x)] \leq deg.\,f(x) + deg.\,g(x)$

Unit-II (इकाई-II)

18. (a) Prove that the necessary and sufficient condition for a non-void subset W of a vector space $V(F)$ to be a subspace of $V(F)$ is:

सिद्ध कीजिये कि किसी सदिश समष्टि $V(F)$ के एक अरिक्त उपसमुच्चये W के लिये $V(F)$ की एक उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है: $a, b \varepsilon F$ and $\alpha, \beta \varepsilon W \Rightarrow (a\alpha + b\beta) \varepsilon W$

(b) Prove that the set $S = \{a + ib, c + id\}$ is a basis of vector space C(R) if and only if $(ad - bc) \neq 0$.

सिद्ध कीजिये कि समुच्चय $S = \{a + ib, c + id\}$ सदिश समष्टि C(R) का एक आधार समुच्चय है यदि और केवल यदि $(ad - bc) \neq 0$

19. (a) Show that every n-dimensional vector space $V(F)$ is isomor phic to $V_n(F)$ i.e. $V(F) \cong V_n(F)$

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक n-विमीय सदिश समष्टि $V(F)$, $V(F)$ के तुल्यकारी होता है अर्थात् $V(F) \cong V_n(F)$

(b) Find the matrix of linear transformation t on R^3 with respect the basis B defined as:

आधार B के सापेक्ष R^3 पर परिभाषित रैखिक रूपान्तरण t की मैट्रिक्स ज्ञात कीजिये:

$t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 - x_2 - 4x_3, 2x_1 - x_3)$

Unit-III (इकाई-III)

20. (a) Let W be a subspace of V(F), then prove that

यदि W, V(F) की उपसमष्टि हो, तो सिद्ध कीजिये कि:

$$\dim A(W) = \dim F - \dim W$$

(b) Show that the following matrix A satisfies Cayley-Hamilton theorem. Hence find its inverse A^{-1}:

प्रदर्शित कीजिये कि निम्न मैट्रिक्स A कैली – हेमिल्टन प्रमेय को सन्तुष्ट करती है। फलत: उसकी प्रतिलोम मैट्रिक्स A^{-1} ज्ञात कीजिये:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

21. (a) Prove that:

(i) Similar matrices have same trace.

(ii) Similar matrices have the same eigenvalues.

सिद्ध कीजिये कि:

(अ) समरूप मैट्रिसेज की ट्रेस समान होती है।

(ब) समरूप मैट्रिसेज के आइगेनमान समान होते है।

(b) Diagonalize the following matrix.

निम्न मैट्रिक्स को विकर्णित कीजिये:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$