

**MATHEMATICS**

**First Paper : Abstract Aigebra**

**Time allowed : Three hours**

**Maximum Marks 75 for  
Science 66 for Arts.**

**Parts - A**

1. Give an example which represent a semi group but not a monoid.  
सेमी समूह का एक उदाहरण दीजिए जो मोनोएड न हो।

2. Define a group based on left axioms.  
वाम अभिग्रहीतों पर आधारित समूह की परिभाषा दीजिए।
3. Write the number of different cosets of  $H = (0, 4)$  in the group  $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$ .  
समूह  $G = (\mathbb{Z}_8, +_8)$  में  $H = (0, 4)$  के सभी विभिन्न सहसमुच्चयों की संख्या लिखिए।
4. Write Lagrange's theorem. लेंगेज प्रमेय लिखिए।
5. Define simple group. सरल समूह को परिभाषित कीजिए।
6. Define quotient group. विभाग समूह की परिभाषा दीजिए।
7. Define even and odd permutations. सम तथा विसम क्रमचय की परिभाषा दीजिए।
8. Define ring without zero divisor. शून्य भाजक रहित वल्य को परिभाषित कीजिए।
9. Define ring homomorphism. वल्य समाकारिता को परिभाषित कीजिए।
10. Define principle ideal ring. मुख्य गुणजावली वल्य की परिभाषा दीजिए।

### Parts - B

11. Prove that if  $a^m = e$  iff  $m$  is a non negative integer then  $a^m = e$  iff  $m$  is a multiple of  $n$  i.e.  $m = nq$ ,  $q \in \mathbb{N}$ .  
सिद्ध कीजिए यदि तथा एक अऋणात्मक पूर्णांक है तो यदि और केवल यदि का गुणन हो अर्थात्
12. Let  $H = [(1), (12)]$  and  $K = \{(1), (13)\}$  be two subgroups of the symmetric group  $S_3$ , then show that  $HK = KH$ .  
सममित समूह के दो उपसमूह हैं तो सिद्ध कीजिए कि
13. Prove that the order of a cycle of length  $r$  is  $r$ .  
सिद्ध कीजिए कि लम्बाई के चक्र की कोटि होती है।
14. Prove that two cosets of a normal subgroup are either disjoint or identical.  
सिद्ध कीजिए कि एक समूह के विशिष्ट उपसमूह के दो सहकुलक या तो असंयुक्त होंगे या समान होंगे।
15. Prove that an ideal  $I$  of a commutative ring  $R$  with unity is prime iff  $R/I$  is an integral domain.  
सिद्ध कीजिए कि किसी क्रम विनिमय तत्समकी वल्य की कोई गुणजावली अभाज्य गुणजावली होती है। यदि और केवल यदि एक पूर्णांकीय प्रान्त है।

### Parts - C

#### Unit - I

16. Prove that the union of two subgroups of group  $G$  is a subgroup iff one is contained in the other.  
सिद्ध कीजिए कि किसी समूह  $G$  के दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह है यदि और केवल यदि एक दूसरे में अन्तर्विष्ट (निहित) है।

**OR**

Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.  
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित समूहों किसी क्रमचय समूह के तुल्यकारी होता है।

#### Unit - II

17. State and prove fundamental theorem on homomorphism.

समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का कथन लिखकर सत्यापित कीजिए।

**OR**

Prove that the set  $A_n$  of all even permutations of degree  $n$  is a group of order  $\lfloor n/2 \rfloor$ .

सिद्ध कीजिए कि  $n$  कोटि (अंशांक) के सभी क्रमचयों का समुच्चय  $A_n$  एक समूह है जिसका समूहांक  $\lfloor n/2 \rfloor$  है।

**Unit - III**

18. Prove that the set of all real number of the form  $m + n\sqrt{2}$ , where  $m$  and  $n$  are integer with ordinary addition and multiplication forms a ring. Is it a field.

सिद्ध कीजिए कि  $m + n\sqrt{2}$  जहाँ  $m$  तथा  $n$  पूर्णांक हो आकार की वास्तविक संख्याओं का समुच्चय संख्याओं के योग एवं गुणन के लिए वल्य है। क्या यह क्षेत्र है?

**OR**

Prove that an ideal  $I$  of a commutative ring  $R$  with unit is maximal iff the quotient ring  $R/I$  is a field.

सिद्ध कीजिए कि तत्समकी क्रमविनिमेय वलय की कोई गुणजावली 1 एक उचिष्ट गुणजावली है यदि और केवल आदि विभाग वलय एक क्षेत्र है।