

B.A./B.Sc. (Part-I) EXAMINATION, 2016

MATHEMATICS

Paper- I : Algebra and Matrices

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

[Marks : 15]

Part-A (Compulsory)

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Write types of discontinuity. असातत्य के प्रकार लिखिये।
2. Define limit of function of two variables.
दो चरों के फलन की सीमा को परिभाषित कीजिए।
3. Define Supremum and infimum of following set.
निम्नलिखित समुच्चय के उच्चक एवं निम्नक लिखिए
 $\{ \frac{3n+2}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \}$
4. State geometrical interpretation of Lagrange's mean value theorem. लाग्रांज मध्यमान प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ समझाइये।
5. Define partition of a closed interval.
संवृत अन्तराल का विभाजन परिभाषित कीजिए।
6. Write Euler's formulae for Fourier series.
फूरिये श्रेणी के लिए आयलर सूत्र लिखिये।
7. Define limit point of sequence.
अनुक्रम के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।
8. State Cauchy's n^{th} root test for infinite series.
अन्त श्रेणी के लिए कोशी के $n^{\text{वें}}$ मूल परीक्षण का कथन लिखिए।
9. Define uniform convergence.
एक समान अभिसरण को परिभाषित कीजिए।
10. State Leibnitz's test for alternating series.
एकान्तर श्रेणी के लिए लेबनीज का कथन लिखिए।

Part-B (Compulsory)

भाग- ब (अनिवार्य)

11. If यदि $u = \tan^{-1} \left[\frac{x^3 + y^3}{x - y} \right]$ then prove that- तो सिद्ध कीजिए
 $x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} = \sin 2u$.

Or

If $z = xy^2 + x^2y$; $x = at^2$, $y = 2at$
then find $\frac{dz}{dt}$

यदि $z = xy^2 + x^2y$; $x = at^2$, $y = 2at$ तो ज्ञात कीजिए $\frac{dz}{dt}$

12. Prove that the envelop of family of parabolas $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1$ is an Astroid when $ab = c^2$, c being constant
सिद्ध कीजिए कि परवलयों $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1$ के कुल का अन्वालोप एक एस्ट्रायड होता है जबकि $ab = c^2$, c अचर है।

Or

If (यदि) $u^3 + v^3 = x + y$, and तथा $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$, then
find the value of (तो मान ज्ञात कीजिए)

$\frac{d(uv)}{d(xy)}$

$d(xy)$

13. State and prove Lagrange's mean value theorem.
लाग्रांज का माध्य मान प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

Or

Examine following function for maximum and minimum
निम्न फलन के उच्चतम तथा निम्नतम की जाँच कीजिए -

$$u = x^3 - 4xy + 2y^2$$

14. Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$ converges to 3 where सिद्ध कीजिए कि
अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ '3' को अभिसूत होती है जहां

$$x_n = \frac{3n}{n + 5\sqrt{n}}$$

Or

If $f(x) = x$, $x \in [0, a]$ prove that (सिद्ध कीजिए)

$$f \in R [0, a] \text{ and } \int_0^a f(x) dx = a^2/2$$

15. Examine whether the following series is convergent or divergent -
जाँच कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है या अपसारी .

$$\frac{1}{1^p} + \frac{2}{2^p} + \frac{3}{3^p} + \frac{4}{4^p} + \dots$$

Or

Examine whether the following series is convergent or divergent -
जाँच कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है या अपसारी .

$$\frac{14}{1^3} + \frac{24}{2^3} + \frac{34}{3^3} + \dots + \frac{10n+4}{n^3} + \dots$$

Part-C (Compulsory)

भाग-स (अनिवार्य)

UNIT-I (इकाई-I)

- 16.(a) If a function f is continuous on $[a \ b]$ then it attains its supremum and infimum at least once in $[a \ b]$

यदि फलन f संवृत अन्तराल $[a \ b]$ में सतत हो तो फलन इस अन्तराल में कम से कम एक बार अपने उच्चक एवं निम्नक को प्राप्त करता है।

- (b) State and prove Rolle's mean value theorem.

रोल के मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध कीजिए।

Or

- (a) Apply Lagrange's mean value theorem for function $\log(1+x)$ to show that -

फलन $\log(1+x)$ में लाग्रांज मध्यमान प्रमेय की सहायता से सिद्ध कीजिए।

$$0 < [\frac{\log(1+x)}{x}] - 1 < 1, \quad x > 0$$

- (b) Find maximum and minimum value of -

उच्चतम या निम्नतम मान ज्ञात कीजिए -

$$u = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{when } ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$$

$$\text{and } lx + my + nz = 0$$

UNIT-II (इकाई-II)

- 17.(a) Change order of integration in the following integral -

निम्न समाकल में समाकलन का क्रम बदलिए -

$$\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} \Phi(x, y) dx dy$$

- (b) Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

Or

- (a) Obtain Fourier series for function

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi \text{ and deduce from it.}$$

$$\frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

फलन $f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$ का फूरिये श्रेणी और इसमें निगमन

प्राप्त कीजिए।

$$\frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

- (b) Prove that every monotonic functions is R - integrable.
सिद्ध करो कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन R - समाकलनीय होता है।

UNIT-III (इकाई-III)

- 18.(a) Find Fourier series for following function.

निम्नलिखित फलन के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए।

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi x}{4} & 0 < x < \pi \end{cases}$$

- (b) Test the convergence of following series -

निम्न श्रेणी की अभिरण का परीक्षण कीजिए -

$$x + 2^2 x^2/2 + 3^3 x^3/3 + 4^4 x^4/4$$

Or

- (a) Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$ is convergent and $2 \leq \lim x_n \leq 3$, where

$$x_n = 1 + 1/1 + 1/2 + \dots + 1/n$$

सिद्ध कीजिए की अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ अभिसारी है तथा $2 \leq \lim x_n \leq 3$ जहाँ,

$$x_n = 1 + 1/1 + 1/2 + \dots + 1/n$$

- (b) Prove that following series is uniformly convergent

सिद्ध कीजिए की निम्न श्रेणी एक समान अभिसारी श्रेणी है।

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots$$

यदि $0 \leq a \leq x \leq b \leq 2\pi$