

# MATHEMATICS

## Paper - I Advance Calculus

M. M. : 75

Time Allowed : Three Hours

### Part-A (भाग-अ) M.M.-15

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रश्नों का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

### Part-B (भाग-ब) M.M.-15

सभी पाँच प्रश्न कीजिये। प्रश्नों के उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होने चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

### Part-C (भाग-स) M.M.-45

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिये। सभी प्रश्नों का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

#### Part-A (Compulsory)

[Marks : 10]

#### भाग- अ (अनिवार्य)

1. Give definition of Envelope. अन्वालोप की परिभाषा दीजिये।

2. If  $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$ , then find value of  $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$ .

यदि  $u=f\left(\frac{y}{x}\right)$ , तब निम्न का मान ज्ञात कीजिये:  $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}$

3. Give  $\epsilon-\delta$  definition of limit of a function.

फलन के सीमा की  $\epsilon-\delta$  परिभाषा दीजिये।

4. Show that  $f(x)=x, \forall x \in R$  is differentiable everywhere:

प्रदर्शित कीजिये कि फलन  $f(x)=x, \forall x \in R$  सर्वत्र अवकलनीय है।

5. Define Gamma function. गामा फलन परिभाषित कीजिये।

6. State Dirichlet's integral. डिरिचलेट समाकल का कथन कीजिये।

7. Evaluate : मान ज्ञात कीजिये:

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} r \sin \theta d\theta dr$$

8. Define monotone sequence. एक दिष्ट अनुक्रम की परिभाषा लिखिये।

9. Show that the following series is divergent:

प्रदर्शित कीजिये कि निम्न श्रेणी अपसारी है:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{2}{6}} + \sqrt{\frac{3}{8}} + \dots$$

10. Define Fourier series. फूरिये श्रेणी को परिभाषा दीजिये।

**Part - B (Compulsory)**

[भाग - ब (अनिवार्य)]

11. Find the envelope of the family of the following straight line,  $\alpha$  being the parameter:

निम्न सरल रेखा के कुल का अन्वालोप ज्ञात कीजिये, जहाँ  $\alpha$  प्राचल है:

$$ax \sec \alpha - by \operatorname{cosec} \alpha - a^2 - b^2$$

12. Show that : प्रदर्शित कीजिये:

$$I'(n)I'(I-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$$

13. Evaluate: मान ज्ञात कीजिये:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

14. Show that every convergent sequence is bounded.

प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

15. Show that the following series is convergent:

प्रदर्शित कीजिये कि निम्न श्रेणी अभिसारी है:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

**Part-C (भाग-स)**

**Unit-I (इकाई-1)**

16. (a) If  $x^x y^y z^z = C$ , then prove that at  $x = y = z$ :

यदि  $x^x y^y z^z = C$  तो  $x = y = z$  पर सिद्ध कीजिये:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x \log ex}$$

(b) If  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , then find the value of:

यदि  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  तो मान ज्ञात कीजिये:

$$\frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)}$$

17. (a) Examine for continuity and differentiability of the function at  $x=2$ .

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ 5-x, & x \geq 2 \end{cases}$$

$x=2$  पर फलन  $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ 5-x, & x \geq 2 \end{cases}$  के सांतत्य तथा अवकलनीयता की जाँच कीजिए।

- (b) Find the maximum or minimum value of the following function :  
निम्न फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिये:

$$U = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

### Unit-II ( इकाई-II )

- 18.(a) Prove that : सिद्ध कीजिये:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1} + x^{n-1}}{(1+x)^{m+n}} dx = B(m, n)$$

- (b) Evaluate: मान ज्ञात कीजिए:

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

- 19.(a) Let  $f$  be a bounded defined on  $[a, b]$ ; then  $f \in R[a, b]$  if given  $\epsilon > 0, \exists$  partition  $P \in P[a, b]$  such that:

फलन  $f[a, b]$  पर परिसीमित है तो फलन  $f$  समाकलनीय है यदि प्रत्येक  $\epsilon > 0$  के लिए विभाजन  $P \in P[a, b]$  विद्यमान है कि:

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

- (b) Show that every continuous function is R-integrable.  
प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन R-समाकलनीय होता है।

### Unit-III ( इकाई-III )

20. (a) Show that following sequence converges to 'I':

$$\langle x_n \rangle, \text{ where } x_1 = \frac{1}{2} \text{ and } x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3}$$

प्रदर्शित कीजिए कि निम्न अनुक्रम 'I' को अभिसृत होती है

$$\langle x_n \rangle, \text{ जहाँ } x_1 = \frac{1}{2} \text{ तथा } x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3}$$

- (b) Test the convergence of following series :  
निम्न श्रेणी की अभिसरण की जाँच कीजिए:

$$\frac{2x}{1^2} + \frac{3^2 x^2}{2^3} + \frac{4^3 x^3}{3^4} + \frac{5^4 x^4}{4^5} + \dots$$

21. (a) Prove that following series is uniformly convergent:  
सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी एकसमान अभिसारी है:

$$\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots \quad 0 < a \leq x \leq b \leq 2\pi$$

- (b) Find Fourier series for the function:

$$f(x) = x^2, \quad -\pi < x < \pi$$

फलन  $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$  के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए।