

MATHEMATICS

Paper - I : Advance Calculus

Time Allowed :- Three Hours

Maximum Marks : 75

Section - A (खण्ड – अ) Max. Marks : 15

सभी दस प्रश्न करना अनिवार्य है। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 20 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section - B (खण्ड – ब) Max. Marks : 15

सभी पांच प्रश्न कीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर 50 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Section - C (खण्ड – स) Max. Marks : 45

प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न चुनते हुए, कुल तीन प्रश्न कीजिए। प्रश्नों का उत्तर 400 शब्दों से अधिक नहीं होना चाहिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part A (Compulsory)

[Marks : 10]

भाग- अ (अनिवार्य)

1. State Euler's theorem for homogeneous functions.
समघात फलनों के लिए आयलर प्रमेय का प्रकथन लिखिए।
2. Define continuity of functions of two variables.
दो चरों वाले फलनों की संततता को परिभाषित कीजिए।
3. For Beta function prove that : $B(m, n) = B(n, m)$.
बीटा फलन के लिए सिद्ध कीजिए : $B(m, n) = B(n, m)$ ।

4. Define envelope of a one parameter family of plane curves.
एक प्राचल वाले वक्र कुल के अन्वालोप को परिभाषित कीजिए।
5. State fundamental theorem of Integral calculus.
समाकलन के मूल प्रमेय का प्रकथन लिखिए।
6. Define a real sequence. वास्तविक अनुक्रम की परिभाषा लिखिए।
7. Write necessary and sufficient conditions for the convergence of a sequence.
एक अनुक्रम के अभिसरित होने की आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त लिखिए।
8. Define periodic functions and show that a constant function is periodic.
आवर्ती फलन की परिभाषा लिखिए और सिद्ध कीजिए कि अचर फलन आवर्ती फलन होता है।
9. Define odd and even functions.
सम और विषम फलन को परिभाषित कीजिए।
10. Define uniform convergence of sequence of function of real numbers.
वास्तविक संख्याओं के फलनों की अनुक्रम के एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

Part - B (Compulsory)

[भाग - ब (अनिवार्य)]

11. If $u = f(y - z, z - x, x - y)$, then prove that:
यदि $u = f(y - z, z - x, x - y)$, सिद्ध कीजिए:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

12. Find the evolute of the following curve :
निम्नलिखित वक्र का केन्द्रज ज्ञात कीजिए:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

13. Prove that :
सिद्ध कीजिए कि :

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\pi}$$

14. Change the order of integration in the integral :
निम्नलिखित समाकल में समाकलन का क्रम परिवर्तित कीजिए:

$$\int_0^a \int_{\frac{x}{a}}^{\frac{2a-x}{a}} f(x, y) dx dy$$

15. Define Cauchy sequence and prove that every Cauchy sequence is

bounded. कोशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि कोशी अनुक्रम परिबद्ध होती है।

Part-C (भाग-स)

Unit-I (इकाई-I)

16. (a) Prove that the following function is continuous but not differentiable at $x = 0, 1$: $7\frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 0, 1$ पर संतत है, किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = |x| + |x - 1|$$

- (b) State and prove Lagrange's mean value theorem.

लाग्रांज के मध्यमान प्रमेय का प्रकथन लिखकर, प्रमेय को सिद्ध कीजिए।

17. (a) Check the continuity of the following function of two variables at the point $(0, 0)$:

निम्न दो चरों वाले फलन की बिन्दु $(0, 0)$ पर संततता का परीक्षण कीजिए:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x - y}, & \text{if } x \neq y \\ 0, & \text{if } x = y \end{cases}$$

- (b) Find the maxima and minima of the function:

निम्न फलन का उचिष्ट और निम्निष्ट ज्ञात कीजिए :

$$f(x, y) = x^3 y^3 (1 - x - y)$$

Unit-II (इकाई-II)

18. (a) Find the area enclosed by the circle $x^2 + y^2 = a^2$ and the line $x + y = a$ in the first quadrant by use of double integral.

द्विसमाकल से वृत $x^2 + y^2 = a^2$ तथा रेखा $x + y = a$ द्वारा प्रथम चरण में परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (b) Find the volume bounded by the coordinate planes and the plane

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

निर्देशांक तल तथा तल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ से परिबद्ध आयतन ज्ञात कीजिए।

19. (a) Prove that every monotonic function is R -integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक एकदिष्ट फलन R -समाकलनीय होता है।

- (b) Prove that following function is R -integrable :

$$f(x) = x^2, \text{ defined on } [0, a], a > 0$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन R -समाकलनीय है :

$f(x) = x^2$, अन्तराल $[0, a]$ पर परिभाषित तथा $a > 0$

Unit - III (इकाई - III)

20. (a) Prove that the sequence $\langle x_n \rangle$ is convergent, where:
सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$ अभिसारी है, जहाँ :

$$x_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

- (b) Test for convergence the following series:
निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण की जांच कीजिए:

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{x}{4.5.6} + \frac{x^2}{7.8.9} + \frac{x^3}{10.11.12} + \dots$$

21. (a) Examine for uniform convergence the series, the sum of whose n terms is $S_n(x)$, where:
एक समान अभिसरण के लिए उक्त श्रेणी का परीक्षण कीजिए जिसके n पदों का योग $S_n(x)$ है, जहाँ :

$$S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}; \text{ Where (जहाँ) } 0 \leq x \leq 1$$

- (b) Find a Fourier series for the function $f(x) = x \sin x$, where $-\pi < x < \pi$
फलन $f(x) = x \sin x$, जहाँ $-\pi < x < \pi$ के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए।