

# MATHEMATICS

## Paper- I : Advance Calculus

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

### Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

#### भाग- अ ( अनिवार्य )

1. Define homogeneous function. समघात फलन को परिभाषित कीजिये।
2. Define evolute. केन्द्रज को परिभाषित कीजिये।
3. Define cauchy's definition of continuity ?  
सांतत्य की कोशी परिभाषा को परिभाषित कीजिये।
4. State the Rolle's theorem. रोल प्रमेय का कथन लिखिए।
5. Define beta and gamma function.  
बीटा एवं गामा फलन को परिभाषित कीजिये।
6. Define lower and upper darboux sum.  
निम्न एवं उपरि डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।
7. Write Riemann's criterion for intergrability ?  
समाकलनीयता के लिए रीमान कसौटी लिखिए।
8.  $\sum U_n$  is convergent  $\lim \Rightarrow \lim U_n = 0$ .  
 $\sum U_n$  अभिसारी है  $\Rightarrow \lim U_n = 0$ .
9. Write Fourier series for even and odd functions.  
सम एवं विषम फलनों के लिये फूरिये श्रेणी लिखिए।
10. Write Weierstrass M test for uniform convergence.  
एक समान अभिसरण के वायस्ट्रॉस M परीक्षण का कथन लिखिए।

### Part - B

11. If यदि  $X^x Y^y X^z = c$ , then prove that तो पर सिद्ध कीजिए – at  $x = y = z$   
$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{x \log x}$$

OR

11. If यदि  $u = \log \left( \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right)$ , then prove that तो पर सिद्ध कीजिए –

$$x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} = 1$$

12. show that the envelope of the family of circles whose diameters are double ordinates of the parabola  $y^2=4ax$  is the parabola  $y^2=4a(x+a)$ . परवलय  $y^2=4ax$  की द्विगुण कोटियों को व्यास मानकर वृत्त खींचे गए हैं। सिद्ध कीजिए कि उसका अन्वालोप परवलय  $y^2=4a(x+a)$  है।

OR

12. If  $u^3 + v^3 = x + y$  and  $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$  then find the value of -  
यदि  $u^3 + v^3 = x + y$  तथा  $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$  तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए-
- $$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$$

13. Prove that - (मान ज्ञात कीजिए) -

$$f(m)f\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} f(2m), m \in \mathbb{Z}$$

OR

13. Evaluate (सिद्ध कीजिए) -

$$\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$$

Where region of integration is the complete ellipsoid.

(जहाँ समाकलन का क्षेत्र सम्पूर्ण दोर्घवृत्तज है।)

14. If यदि  $f(x) = x, x, \epsilon [0, 1]$ , then prove that तो पर सिद्ध कीजिए -

$$f \in R [0, 1] \text{ and } \int_0^1 f(x) \, dx = \frac{1}{2}$$

14. Find Fourier series for the following function -

निम्न फलन के लिए फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए-

$$f(x) = x, -\pi < x < \pi$$

15. Show that the following series is convergent.

सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी अभिसारी है-

$$\sum \left( \frac{n}{1+n} \right) n^2$$

OR

15. Test for uniform convergence and term by term integration of the following series -

निम्न श्रेणी की एकसमान तथा पदशः समाकलन के लिए जांच कीजिए -

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$$

## Part - C

### Unit - I

16. (a) If a function  $f$  is continuous in a closed interval  $[a, b]$ , then it is bounded in that interval. यदि फलन  $f$  संतुत अंतराल  $[a, b]$  में संतुत हो, तो वह उस अंतराल में परिबद्ध होता है।

- (b) State and prove General mean value theorem. Also deduce from it Cauchy mean value theorem and Lagrange's mean value theorem.

व्यापक मध्यमान प्रमेय को कथन देकर सिद्ध कीजिए। इससे कोशी मध्यमान प्रमेय एवं लाग्रांज मध्यमान प्रमेय का निर्गमन भी कीजिए।

OR

- (a) If  $f$  is differentiable in  $[a, b]$  and if  $K$  is a number between  $f(a)$  and  $f(b)$  then there exists a number  $C \in (a, b)$  such that  $f'(C) = K$ .

यदि फलन  $f$   $[a, b]$  अन्तराल में अवकलनीय है तथा  $f(a)$  और  $f(b)$  के मध्य कोई  $K$  संख्या है तो अंतराल  $(a, b)$  में ऐसा बिन्दु  $C$  विद्यमान होगा कि  $f'(C) = K$ .

- (b) Find the maximum and minimum value of  $u = ax^2 + by^2 + cz^2$ , where  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  and  $lx + my + nz = 0$ .

निम्न फलन का उच्चतम तथा न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए  $u = ax^2 + by^2 + cz^2$  जहाँ  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  एवं  $lx + my + nz = 0$

17. (a) Change the order of integration in the following integral.

निम्न समाकलन में समाकलन का क्रम बदलिए—

$$\int_0^{a \cos \alpha} \int_{x \tan \alpha}^{\sqrt{(a^2 - x^2)}} f(x, y) dx dy$$

- (b) Evaluate (मान ज्ञात कीजिए) —

$$\int_0^{\log 2} \int_0^x \int_0^{x+\log y} e^{x+y+z} dx dy dz$$

17. (a) Show that every continuous function is R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतुत फलन R-समाकलनीय होता है।

- (b) If the primitive of  $f \in R[a, b]$  is  $\phi$  in  $[a, b]$ , then —

यदि  $f \in R[a, b]$  का पूर्वग  $\phi$  in  $[a, b]$  में है, तो —

$$\int_a^b f(x) dx = \phi(b) - \phi(a)$$

### Unit - III

18. (a) Show by Cauchy's general principle of convergence that the sequence  $\langle X_n \rangle$  is not convergent. Where -

कोशी के अभिसरण के सामान्य सिद्धांत से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रमत  $\langle X_n \rangle$  अभिसारी नहीं हैं, जहाँ –

$$X_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

- (b) Show that the following series is uniformly convergent-  
सिद्ध कीजिए कि निम्न श्रेणी एकसमान अभिसारी है

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \dots, (-1 < x < 1)$$

OR

18. (a) Find the Fourier series for the function defined as-  
निम्न प्रकार परिभाषित फलन के लिए फूरिए श्रेणी ज्ञात कीजिए-

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } -\pi \leq x < 0 \\ 0 & \text{for } x = 0 \\ 1 & \text{for } 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Hence deduce that (फलतः दिखालाइए) –

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

- (b) Examine the following series for convergence-  
निम्न श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए-

$$x + x^{1+\frac{1}{2}} + x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} + \dots$$