

MATHEMATICS

Paper- I : Algebra and Matrices

Time : Three Hours

M.M. : 75/6t

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Define rank of a matrix. एक मैट्रिक्स की कोटि परिभाषित करो।
2. Define characteristic roots of a matrix.
एक मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मूल परिभाषित करो।
3. State Cayley - Hamilton theorem. कैले - हैमिल्टन प्रमेय का कथन लिखो।
4. What is subgroup of a group ? एक समूह का उपसमूह क्या होता है ?
5. Define cyclic group. चक्रीय समूह परिभाषित करो।
6. Find all generators of cyclic group $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\}$.
चक्रीय समूह $\{a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6 = e\}$ के सभी जनक ज्ञात करो।
7. State Fermat's theorem. फर्मा प्रमेय का कथन लिखो।
8. Give one example of a sub - group which is not normal sub group.
एक ऐसे उपसमूह का उदाहरण लिखो जो प्रसामान्य नहीं हो।
9. Define permutation of a set.
एक समुच्चय के क्रमचय की परीभाषा लिखो।
10. State Cayley theorem. कैली प्रमेय का कथन लिखो।

Part - B (Compulsory)

भाग- ब (अनिवार्य)

11. Find rank of following matrix.

निम्न मैट्रिक्स की कोटि ज्ञात करो-
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

12. Obtain the characteristic equation and characteristic roots of following matrix.

निम्न मैट्रिक्स के अभिलाक्षणिक मूल व समीकरण ज्ञात करो।

15

- (b) Prove that every infinite cyclic group has two and only two generators.

सिद्ध करो प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

Or (अथवा)

- (a) If H and K are two subgroups of a Group G then prove that HK is sub-group of G iff $HK = KH$.

यदि H व K किसी समूह G के दो उपसमूह हो तो सिद्ध करो HK G का उपसमूह होगा यदि $HK = KH$.

- (b) For any element a of a group G prove that $o(a) = o(x^{-1}ax), \forall x \in G$.

एक समूह G के किसी अवयव a हेतु सिद्ध करो $o(a) = o(x^{-1}ax), \forall x \in G$.

Unit-III (इकाई-III)

- (a) Prove that intersection of any two normal sub-group of a group is a normal subgroup.

सिद्ध करें किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी समूह का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

- (b) The set of all cosets $K \Delta G$ is a group with respect to multiplication of cosets defined as follows.

यदि $K \Delta G$ तो K के सभी सह समुच्चयों का समुच्चय, सह समुच्चयों के निम्न प्रकार परिभाषित गुणा हेतु एक समूह होता है।

$$Ha \cdot Hb = Hab$$

$$a, b \in G$$

OR

- (a) If $\sigma = (1\ 7\ 2\ 6\ 3\ 5\ 8\ 4)$ and $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 8 & 7 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ then prove that

(तो सिद्ध करो) - $\rho \sigma \rho^{-1} = (2\ 6\ 5\ 7\ 4\ 8\ 1\ 3)$

- (b) If f is a homomorphism of a group G to a group G' then prove that if H is a sub-group of $G \Rightarrow f(H)$, is a subgroup of G' .

यदि f समूह G से G' पर समकारिता हो तो सिद्ध करो कि यदि H , G का उपसमूह है $\Rightarrow f(H)$, G' का उपसमूह है।