MATHEMATICS

Paper- III : Mechanics

Time : Three Hours **M.M. : 75/66**

Part-A (Compulsory) **[Marks : 15]**

भाग- अ (अनिवार्य)

1. Defind Angle of frictin. घर्षण – कोण को परिभाषित कीजिए।
2. Prove that the shape of the common catenary represents a parabola.
   सिद्व कीजिए कि सामान्य कैटिनरी की आकृति एक परवलय को प्रदर्शित करती है।
3. Define stable and unstable Equilibrium.
   स्थायी एंव अस्थायी संतुलन को परिभाषित कीजिए।
4. A point describes a cycloid $s = 4a \sin \Psi$ with uniform velocity v. Prove that its acceleration at any point is $\frac{v^2}{4a \cos \Psi}$

   एक कण चक्रज $s = 4a \sin \Psi$ में एक समान वेग v से गमन करता है। सिद्व कीजिए कि किसी बिन्दु पर उसका त्वरण $\frac{v^2}{4a \cos \Psi}$ है।
5. Define simple Harmonic Motion. सरल आवर्त गति को परिभाषित कीजिए।
6. Define Hooke's Law for elastic strings.
   प्रत्यास्थ डोरियो के लिये हुक का नियम लिखिए।
7. Write the principle of aeral conservation. क्षेत्रफल संरक्षण सिद्वांत लिखिए।
8. Write Kepler's Law of planetary motion.
   ग्रहीय गति हेतु केपलर के नियम लिखिए।
9. Write the Reciprocal Polar Form of central orbit.
   सकेन्द्र कक्षा का व्युत्क्रम ध्रुवी रूप लिखिए।
10. Define Direct and Oblique Impact.
    समक्ष व निर्यक संघट्ट को परिभाषित कीजिए।

Part - B

11. Six equal rods AB, CD, DE, EF and FA are each of weight W and are

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

freely jointed at their extermities so-as to from a hexagon. The rod AB is fixed in a horizontal position and the middle points of AB and DE are joined by a string. Prove that the tension is 3W.

छः समान दण्ड AB, CD, DE, EF और F प्रत्येक W भार की है और स्वच्छन्तापूर्वक सिरों पर इस प्रकार जुड़ी हुई हैं कि एक षड्भुज बने। दण्ड AB को क्षैतिज स्थिति में रखा जाता है और AB, DE के मध्य बिन्दुओ को एक डोरी द्वारा जोड़ा जाता है। सिद्व कीजिए कि डोरी में तनाव 3W.

12. Prove that the angular acceleration in the direction of motion of a point moving in a plane is -

सिद्व कीजिए कि एक समतल में गतिमान एक कण का गति की दिशा में कोणीय त्वरण होगा– $\frac{V}{\ell}\frac{dv}{ds}-\frac{V^2}{\ell^2}\frac{d\ell}{ds}$

13. A particle stars from rest at infinity and falls on the surface of the earth. Find its velocity at the surface of the earth. यदि कोई कण अनन्त दूरी से विरामावस्था से पृथ्वी तल पर गिरता है तो पृथ्वी तल पर उसका वेग ज्ञात कीजिए।

14. A heavy particle of weight W attached to a fixed point by a light inextensible string, describes a circle in a vertical plane. Then tension of the string has the values mW and nW respectively, when the particle is at the highest and lowest point of the path. Show that n = m + 6.

W भार का कण जो किसी स्थिर बिन्दु से एक भारहीन अवितान्य डोरी द्वारा लटकाया हुआ है, एक ऊर्ध्वाधर तलीय वृत्त में चलता है। जब कण अपने पथ कें उच्चतम तथा निम्नलिखित बिन्दुओं पर होता है तो डोरी में तनाव क्रमशः mW तथा nW होते हैं। सिद्व कीजिए कि n = m + 6

15. A particle is describing an ellipse of eccentricity e about a centre of force at focus. With usual notation, prove that-

एक कण नाभि जमें स्थित बल केन्द्र के प्रति एक दीर्घवृत्त निर्मित करता हैं। जिसकी उत्केन्द्रता e है। सामान्य संकेतों में सिद्व कीजिए–

$$V^2=\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right), h^2=\mu a(1-e^2)$$

Part -C

16. (a) A rod rests wholly with in a smooth homispherical bowl of radius r, its centre of gravity dividing the rod into ture portions a and b. Show that if θ be the inclination of the rod to the horizon and 2α is the angle subtended by the rod at the centre of the hemispherical bowl, in the position of equilibrium show -

एक छड़ जिसका गुरूत्व केन्द्र उसे a तथा b लम्बाई के दो भागों में विभाजित करता है। r त्रिज्या के एक चिकने गोले के अंदर पूर्णत: रखी हुई है। यदि साम्यावस्था में छड़ का क्षैतिज से झुकाव θ हो और छड़ गोले के केन्द्र पर कोण

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

2α अन्तरित करती है तो सिद्ध कीजिए –

(i) $\sin\theta \frac{b-a}{\sqrt[3]{(r^2-ab)}}$ (ii) $\tan\theta \frac{b-a}{b+a}\tan\alpha$

(b) A uniform rod rests in a vertical plane without a fixed hemispherical bowl whose radius is equal to the length of the rod. If μ is the coefficient of friction between the rod and the bowl, show that in limiting equilibrium, the inclination of the rod to the horizontal is -

कोई एक समान छड़ किसी ऊर्ध्वाधर समतल में किसी स्थिर अर्द्धगोलीय प्याले में स्थित है जिसकी त्रिज्या छड़ की लम्बाई के तुल्य है। यदि छड़ और प्याले के मध्यस्थ घर्षण गुणांक μ हो तो सिद्ध कीजिए कि सीमांत संतुलन में छड़ का क्षैतिज से झुकाव है– $tan^{-1}\left(\frac{4\mu}{3-\mu^2}\right)$

OR

16. (a) A smooth cone of weight W stand inverted in a circular hole with its axis vertical. A string is wrapped twice round the cone just above the hole and pulled tight. What must be the tension in the string so that it will raise the cone? W भार का कोई चिकना शंकु एक वृत्तीय छेद में उल्टे रूप में खड़ा रहता है और शंकु का अक्ष ऊर्ध्वाधर रहता है। छेद के ठीक ऊपर एक डोरी को दो बार शंकु के चारों और लपेटा जाता है और कसकर खींचा जाता है। डोरी में कितना तनाव होना चाहिए ताकि वह शंकु को ठीक से उठा ले ?

(b) Show that the length of an endless chain which will hang over a circular puller of radius a so as to be in contact with two thirds of the circumference of the pulley is - प्रदर्शित कीजिए कि एक बिना सिरे की बंद जंजीर जो त्रिज्या a की एक वृत्ताकार घिरनी के $\frac{2}{3}$ भाग में है, तो उसकी लम्बाई होगी– $a\left[\frac{4\pi}{3}+\frac{3}{\log(2+\sqrt{3})}\right]$

Unit - II

17. (a) A point describes the diameter AB of a circle with constant velocity and another semi-circumference. AB from rest with constant tangen tial acceleration. If they start together from A and arrive together at B, show that the velocities at B are as $\pi:1$

एक कण किसी वृत्त के व्यास AB पर अचर वेग से गमन करता है, और एक अन्य कण विरामावस्था से अर्द्धपरिधि AB पर एकसमान स्पर्श रेखीय त्वरण से चलती है। वे से एक साथ रवाना होते हैं और B पर साथ–साथ पहुँचते है। सिद्ध कीजिए कि B पर उसका वेग $\pi:1$ के अनुपात में होगें।

(b) A particle moves in a straight line under a force varying inversely as

Questionpaperresult.com

Scanned by CamScanner

the cube of its distance from the centre. If it starts from rest at a distance a from the centre of force, show that the time of reaching a point distance b from the centre of force is $a\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{\sqrt{\mu}}\right)}$ and its velocity then is $\frac{\sqrt{\mu}}{ab}\sqrt{(a^2-b^2)}$ where is proportional coefficient. Also show that the time to reach the origin in is $\frac{a^2}{\sqrt{\mu}}$

एक कण किसी सरल रेखा में बल केन्द्र से a दूरी पर स्थित किसी बिन्दु से रवाना होता है। यदि उस पर क्रियाशील बल केन्द्र से दूरी के धन व्युत्क्रमानुपाती हो तो सिद्ध कीजिए कि केन्द्र से b दूरी पर स्थित किसी बिन्दु तक पहुँचने में समय $a\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{\sqrt{\mu}}\right)}$ लगेगा तथा उस समय कण का वेग $\frac{\sqrt{\mu}}{ab}\sqrt{(a^2-b^2)}$ है, जहाँ समानुपातिक गुणांक है। यह भी सिद्ध कीजिए कि केन्द्र तक पहुँचने का समय $\frac{a^2}{\sqrt{\mu}}$ है।

OR

17. (a) A particle of mass m resting on a smooth horizontal plane is attached to two fixed points A and B on the plane by elastic strings of unstreated lengths a and b respectively (a>b), the points A and B being a + b apart. The particle is held at B and then released. Prove that the particle will oscillate to and from through a distance $b\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}}$ in periodic time $\pi(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$

m संहति का एक कण a तथा b स्वभाविक लंबाई वाली प्रत्यास्थ डोरियों से बंधा है। जिन्हें चिकने क्षैतिज समतल के दो स्थिर बिन्दुओं A तथा B से बांध दिया जाता है। बिन्दु A और B परस्पर a+b दूरी पर हैं। कण को B तक ले जाकर छोड़ा गया है। सिद्ध कीजिए कि कण $b\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}}$ दूरी से होकर $\pi(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ समय में दोलन करेगा, जहाँ λ डोरी का प्रत्यास्थ मापांक है तथा (a > b).

(b) A particle of mass m is projected vertically upwards with velocity u in a resisting medium due which resistance varies as the velocity. Discuss the motion supposing gravitational force to be constant.

m द्रव्यमान का एक कण वेग से ऊपर की ओर एक ऐसे माध्यम में फेंका जाता है। जिसका प्रतिरोध वेग u के समानुपाती है। उसकी गुरूत्वाकर्षण (अचर माना हुआ) के अधीन विवेचना कीजिए।

Unit - III

18. (a) A heavy bead slides on a smooth fixed circular wire of radius a. If it is projected from the lowest point with velocity just sufficient to carry it to the highest point, prove that the radius through the bead in time t will turn through the angle $2\tan^{-1}\left\{\sin ht\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right\}$ and the bead never reaches the highest point.

एक भारी मनका त्रिज्या वाले किसी स्थिर वृत्तीय तार पर फिसलता है। यदि वह निम्नतम बिन्दु से ऐसे वेग से प्रक्षिप्त किया जाये तो उसे ठीक सर्वोच्च बिन्दु तक ले जा सकता है ,

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

तो सिद्ध कीजिए कि मनके में से जाने वाली त्रिज्या t समय पर $2\tan^{-1}\left\{\sinh t\sqrt{\left(\frac{g}{a}\right)}\right\}$ कोण से घुमेगी और मनका उच्चतम बिन्दु तक कभी भी नहीं पहुँच पायेगा।

(b) A particle starts from rest at any point P in the arc of a smooth cycloid whose axis it vertical and vertex downwards. Find the time of its de scent to the vertex. Show also that if the particle is projected from P downwards along the curve with velocity equal to that with which it reaches the vertex when starting from rest at P, it will now reach A in half the time taken in the preceding case.

एक कण ऐसे चक्रज के किसी बिन्दु P से विरामावस्था से चलता है जिसकी अक्ष ऊर्ध्वाधर एंव शीर्ष नीचे की ओर है। कण के शीर्ष तक पहुँचने का समय ज्ञात कीजिए। यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि कण P से नीचे की ओर उस वेग से प्रक्षिप्त किया जाए जिससे वह P पर विरामावस्था से रवाना होकर शीर्ष पर पहुँचता है तो वह शीर्ष पर पहुँचने में पहले से आधा समय लगाएगा।

OR

18. (a) If the law of force be 2k (u3 - a2 u5) and the particle be projected from an apse at a distance with velocity $\frac{\sqrt{k}}{a}$ show that is will be at a distance r from the centre after a time -

यदि बल का नियम 2k (u3 - a2 u5) हैं तथा एक कण a दूरी पर स्थित स्तब्धिता से $\frac{\sqrt{k}}{a}$ वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है तो प्रदर्शित कीजिए कि कण केन्द्र से r दूरी पर निम्न समय पश्चात् होगा – $\frac{1}{2\sqrt{k}}\left[r\sqrt{(r^2-a^2)}+a^2\cosh^{-1}\frac{r}{2}\right]$

(b) A ball A of mass m_1 impinges directly on another ball B of mass m2 which is at rest. After the impact B impinges directly on the third ball C of mass m3, which is also at reat. If the velocity imparted to C be the same as the velocity of A before impact and if all the balls are perfectly elastic, show that -

m_1 संहति की एक गेंद A दूसरी विरामावस्था में रखी m_2 संहति की गेंद B से सीधा संघट्ट करती है। फिर गेंद B एक तीसरी विरामवस्था में रखी m_3 संहति की गेंद C से सीधा संघट्ट करती है। यदि तीनों गेंदे पूर्णतया प्रत्यास्थ हो तथा संघट्ट के पश्चात् C में वही वेग उत्पन्न हो जो संघट्ट के पहले A में था, तो सिद्ध कीजिए $(m_1 + m_2)(m_2 + m_3) = 4m_1m_2$

Questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner