

# MATHEMATICS

## Paper- III : Vector Calculus and Geometry

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ ( अनिवार्य )

1. If  $r = \cos t i + a \sin t j + tk$ , then find  $\left|\frac{dr}{dt}\right|$   
यदि  $r = \cos t i + a \sin t j + tk$  तो  $\left|\frac{dr}{dt}\right|$  का मान ज्ञात कीजिए।
2. Show  $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$ . सिद्ध कीजिए  $\text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi$
3. Write the Cartesian form of Green's theorem.  
ग्रीन प्रमेय का कार्तीय रूप लिखिए।
4. Find the co-ordinate of centre of conic  $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$ .  
शंकव  $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$  के केन्द्र के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।
5. Write the general equation of circle in polar coordinates.  
वृत्त का ध्रुवीय निर्देशांक में व्यापक समीकरण लिखिए।
6. Write the condition for a plane  $lx + my + nz = p$  to touch the sphere  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ .  
समतल  $lx + my + nz = p$  गोले  $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$  को स्पर्श करे इसका प्रतिबंध लिखिए।
7. Define Reciprocal cone. व्युत्क्रम शंकु की परिभाषा लिखिए।
8. Define Cylinder. बेलन को परिभाषित कीजिए।
9. Define conjugate plane. संग्रामी तल को परिभाषित कीजिए।
10. Give two examples of central conicoid.  
केन्द्रीय शाकवज के दो उदाहरण लिखिए।

Part - B (Compulsory)

15

भाग- ब ( अनिवार्य )

11. Find the directional derivatives of  $\phi = xyz$  in direction if  $i$  at the point  $(1, 2, 3)$ .  
बिन्दु  $(1, 2, 3)$  पर  $\phi = xyz$  का सदिश  $i$  की दिशा में दिक् अवकलज ज्ञात कीजिए।
12. Prove that vector  $f = (\sin y + z)i + (x \cos y - z)j + (x - y)k$  is irrotational.  
सिद्ध कीजिए कि सदिश  $f = (\sin y + z)i + (x \cos y - z)j + (x - y)k$  अधूर्णय सदिश है।
13. Prove that the line  $\frac{x}{A} \cos \theta + B \sin \theta$  will touch  $\frac{x}{e} = 1 + e \cos \theta$  if  $(A - e)^2 + B^2 = 1$ .  
सिद्ध कीजिए कि रेखा  $\frac{x}{A} \cos \theta + B \sin \theta$  शकं  $\frac{x}{e} = 1 + e \cos \theta$  को स्पर्श करेगी यदि  $(A - e)^2 + B^2 = 1$
14. Find the equation of the cylinder whose generators are parallel to  $\frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  and which intersects the ellips  $4x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$ .  
उस बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी जनक रेखाएं  $\frac{x}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$  के समान्तर तथा जो दीर्घवृत्त  $4x^2 + 2y^2 = 1, z = 0$  को प्रतिच्छेद करती है।
15. Find the locus of the middle point of chords of conicoid  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  which pass through the point  $(\alpha, \beta, \gamma)$   
शाकं  $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$  की जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो बिन्दु  $(\alpha, \beta, \gamma)$  से गुजरती है।

### Part-C (भाग-स)

45

#### Unit-I/इकाई-I

16. (a) if  $r = xi + yj + zk$  and  $r + |r|$  then prove that -  
यदि  $r = xi + yj + zk$  तथा  $r + |r|$  तो सिद्ध कीजिए  $-\text{div } r^n r = (n + 3) r^n$
- (b) Using Stoke's theorem, evaluate  $\int_{(x^2 dx + 2y^2 dy - dz)}$  where  $c$  is the curve  $x^2 + y^2 = 4$  and  $z = 2$ .  
स्टॉक प्रमेय द्वारा  $\int_{(x^2 dx + 2y^2 dy - dz)}$  का मान ज्ञात कीजिए जहां  $c$  वक्र  $x^2 + y^2 = 4$  तथा  $z = 2$  है।

#### Or (अथवा)

- (a) Apply Gauss Divergence theorem to evaluate.  
गॉस प्रमेय का उपयोग करते हुए समाकलन का मान ज्ञात कीजिए।

$$\int \int \int (x + z) dy dz + (y + z) dz dx + (x + y) dx dy$$

where  $S$  is the surface of sphere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

जहाँ  $S$  गोले  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  का सम्पूर्ण पृष्ठ है।

- (b) Prove that (सिद्ध कीजिए) -

$$\text{div} (f \nabla g) - \text{div} (g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$$

#### Unit-II (इकाई-II)

17. Trace the curve  $x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$ .

वक्र  $x^2 + y^2 + xy + x + y - 1 = 0$  का अनुरेखण कीजिए।

Or (अथवा)

(a) Find the axis, the vertex, the latus rectum and focus of parabola  $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$ .

परवलय  $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$  की अक्ष, शीर्ष, नाभिलंब तथा नाभि ज्ञात कीजिए।

(b) Find the equation of the sphere having the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ;  $2x - 3y + 6z = 7$  as great circle. Also find the radius and center of this great circle.

उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका वृत्त  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ ;  $2x - 3y + 6z = 7$  एक वृहत् वृत्त हो तथा इस वृहत् वृत्त की त्रिज्या व केन्द्र भी ज्ञात कीजिए।

Unit-III (इकाई-III)

18. (a) Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is the circle  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ;  $x - 2y + 2z = 3$ :

उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशांक वृत्त

$x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ;  $x - 2y + 2z = 3$  है।

(b) Find the equation of two plane which contain the line  $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  and touch the ellipsoid  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$ .

दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा  $7x + 10y - 30 = 0 = 5y - 3z$  से गुजरते हैं तथा दीर्घवृत्त  $7x^2 + 5y^2 + 3z^2 = 60$  को स्पर्श करते हैं।

OR

(a) Prove that the plane  $ax + by + cz = 0$  cuts the cone  $yz + zx + xy = 0$  in perpendicular lines if  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

सिद्ध कीजिए कि समतल  $ax + by + cz = 0$  शंकु  $yz + zx + xy = 0$  को

परस्पर लम्ब रेखाओं में काटेगा यदि  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

(b) Show what plane  $8x - 6y - z = 5$  touches the paraboloid

$\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 = z$  find the co-ordinate of the point of contact.

प्रदर्शित कीजिए कि समतल  $8x - 6y - z = 5$  परवलय  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^2 = z$  को स्पर्श करता है। इससे सम्पर्क बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।