

MATHEMATICS
Paper- III : Mechanics

Time : Three Hours

M.M. : 75/66

Part-A (Compulsory)

[Marks : 15]

भाग- अ (अनिवार्य)

1. State principle of virtual work for a system of coplanar acting on a particle.
किसी कण पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय के लिये कल्पित कार्य सिद्धान्त का

कथन कीजिए

2. Define common catenary. सामान्य कैटिनरी को परिभाषित कीजिए।
3. Write general condition of equilibrium of a rigid body.
एक दृढ़ पिण्ड की साम्यवस्था की सामान्य शर्तें लिखें।
4. Define radial and transverse velocity.
अरीय एवं अनुप्रस्थ वेग की परिभाषा दीजिए।
5. Show that in a SHM of amplitude a and period T , the velocity v at a distance from centre is given by $v^2 T^2 = 4\pi(a^2 - x^2)$.
SHM में चलने वाले किसी कण का आयाम a और आवर्तकाल T है। सिद्ध कीजिए कि माध्य स्थिति से इसकी दूरी $v^2 T^2 = 4\pi(a^2 - x^2)$ द्वारा दी जाती है।
6. A weightless elastic string of natural length l such that its modulus of elasticity is weight of n gms, hung by one end and its other end is attached with a body of m gms, show that time of small vertical oscillation is : $2\pi\sqrt{ml/mg}$.
एक भारहीन प्रत्यास्थ डोरी जिसकी स्वाभाविक लम्बाई l तथा प्रत्यास्थ मापांक n ग्राम भार के बराबर है, एक सिरे से लटकाई जाती है तथा दूसरे सिरे पर m ग्राम का एक पिण्ड लटकाया जाता है, सिद्ध कीजिए कि उदग्र दोलन का समय है : $2\pi\sqrt{ml/mg}$.
7. Define central orbit. संकेन्द्र कक्षा को परिभाषित कीजिए।
8. State universal law of gravitation.
सार्वजनिक गुरुत्वाकर्षण नियम का कथन कीजिए।
9. State law of conservation of momentum.
संवेग संरक्षण सिद्धान्त का कथन कीजिए।
10. Define constrained motion. प्रतिबन्धित गति की परिभाषा दीजिए।

PART-B (COMPULSORY)

भाग-ब (अनिवार्य)

11. If a body be on the point of sliding down an inclined plane under its own weight, show that the inclination of the plane is equal to angle of friction (i.e. $\theta = \alpha$)
किसी आनत समतल पर रखा एक पिण्ड अपने भार के अन्तर्गत फिसलने की अवस्था में हो तो सिद्ध कीजिए समतल का क्षैतिज से झुकाव कोण = घर्षण कोण।
12. A particle is moving with SHM. Its distance from the middle point of its path at three consecutive seconds are observed to be x_1, x_2, x_3 . Prove that the time of small oscillation is : एक SHM में पथ के मध्य बिन्दु से किसी कण की तीन उत्तरोत्तर सेकण्डों में दूरियां x_1, x_2, x_3 हैं। सिद्ध कीजिए की पूर्ण आवर्तकाल है : $2\pi/\cos^{-1}(x_1 + x_3)$

13. A particle moves in curve so that its tangential and normal accelerations are equal and angular velocity of the tangent is constant. Find the curve.
एक कण किसी वक्र में इस प्रकार गमन करता है कि इसके स्पर्श रेखीय एवं अभिलम्बिक त्वरण सदैव समान रहते हैं, और इसके स्पर्श रेखा का कोणीय वेग अचर है, वक्र ज्ञात कीजिए।
14. A particle is moving on a smooth curve and its velocity varies as the arcual distance from the highest point. Prove that the curve is a cycloid.
एक कण गरुत्वाकर्षण के अधीन किसी चिकने वक्र पर चलता है और उसका वेग उसके सर्वोच्च बिन्दु से चापीय दूरी के समानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि वक्र एक चक्रज है।
15. If two equal and perfectly elastic balls moving in the same direction collide directly, prove that they interchange their velocities.
यदि दो समानपूर्ण प्रत्यास्थ गेंदे समक्ष टक्कर करें तो सिद्ध कीजिए कि संघट के पश्चात् उनके वेग परस्पर बदल जाते हैं।

PART-C (COMPULSORY)

भाग-स (अनिवार्य)

UNIT-I (इकाई-I)

- 16.(a) A uniform beam of length $2a$ rests in equilibrium against smooth vertical wall and over a smooth peg at a distance b from the wall. If θ be the inclination of the beam to the vertical, show that :-
 $\sin^3 \theta = b/a$
एक $2a$ लम्बी एक समान छड़ एक चिकनी खूंटी के ऊपर तथा चिकनी उर्ध्वाधर दीवार के सहारे सम्यावस्था में है। यदि खूंटी दीवार से b दूरी पर हो तथा दीवार से छड़ कोण θ नाती हो तो सिद्ध कीजिए :- $\sin^3 \theta = b/a$
- (b) A ladder whose C.G. divides it into two position fo lengths a and b , rests with one end on a rough horizontal floor and the other end against a rough vertical wall. If the coefficient of frictin at the floor and the wall be respectively μ and μ' , show the inclination of the ladder to the floor, when quilibrium is limiting is.
 $\tan^{-1} \left\{ \frac{a - b\mu\mu'}{\mu(a-b)} \right\}$
एक सीढ़ी का गरुत्व केन्द्र इसे दो भाग a और b में बाँटता है। सीढ़ी का एक सिरा रुक्ष क्षैतिज फर्श पर तथा दूसरा रुक्ष उर्ध्वाधर दीवार पर टीका है। यदि फर्श तथा दीवार का घर्षण गुणांक क्रमशः μ और μ' हो तो प्रदर्शित कीजिए कि सीमान्त सन्तुलन में सीढ़ी का फर्श से झुकाव है :

$$\tan^{-1} \left\{ \frac{a - b \mu \mu'}{\mu(a - b)} \right\}$$

$$\mu(a - b)$$

Or

- (a) A uniform chain of length l , is to be suspended from two points A and B in the same horizontal line so that either terminal tension is n times that at lowest point; show that span AB is

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \log \{n + \sqrt{n^2 - 1}\}$$

1. लम्बाई की एक समान जंजीर क्षैतिज रेखा के दो बिन्दु A तथा B के मध्य झूलती है, जिसके सिरों पर तनाव निम्नतम बिन्दु पर तनाव का n गुणन है, तो सिद्ध कीजिए इसकी विस्तृति है :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}} \log \{n + \sqrt{n^2 - 1}\}$$

- (b) Show that the virtual work done by the tension of an inelastic string or the thrust of a light rod is zero.

प्रदर्शित कीजिए कि अविन्यस्त डोरी का तनाव या हल्के दण्ड का प्रणोद द्वारा किया गया कल्पित कार्य शून्य होता है।

UNIT-II (इकाई-II)

- 17.(a) The radial and transverse velocities of a particle are λr and $\mu \theta$. Find its path and show that its radial and transverse components of acceleration are respectively.

$$\lambda^2 r - \mu^2 \theta^2 / r \text{ and } \mu \theta (\lambda + \mu / r)$$

किसी कण के अरीय एवं अनुप्रस्थ वेग क्रमशः λr तथा $\mu \theta$ है। इसका पथ ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि इसके अरीय एवं अनुप्रस्थ त्वरण क्रमशः है।

$$\lambda^2 r - \mu^2 \theta^2 / r \text{ and } \mu \theta (\lambda + \mu / r)$$

- (b) A particle of mass m is acted upon by a force $m\mu \{x + a^{4/3}\}$ towards origin. If it starts from rest at a distance a ; show that it will arrive at the origin in time $\pi / r \sqrt{\mu}$.

m द्रव्यमान वाले किसी कण पर मूल बिन्दु की ओर $m\mu \{x + a^{4/3}\}$ बल कार्य करता है। यदि वह बल केन्द्र से a दूरी पर विरामावस्था से खाना हो तो सिद्ध कीजिए कि वह मूल बिन्दु पर $\{x + a^{4/3}\}$ समय में पहुँचेगा।

Or

- (a) A particle of mass m is performing SHM in the line joining two points A and B on a smooth plane and is connected with these points by elastic strings of natural lengths a and a' , the module of elasticity being λ and λ^{-1} respectively, show that the periodic time is :-

$$2\pi \sqrt{\frac{m(\lambda + \lambda')}{a \cdot a'}}$$

m द्रव्य मान का एक कण चिकने समतल पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा पर सरल आवर्त गति में गतिमान है और वह इन बिन्दुओं से a तथा a' स्वाभावित लम्बाई की प्रत्यास्था डोरियों द्वारा बंधा हुआ है। यदि प्रत्यास्थ मापांक क्रमशः λ तथा λ' हो तो सिद्ध कीजिए कि आवर्तकाल है :

$$2\pi \sqrt{\frac{m(\lambda + \lambda')}{a \cdot a'}}$$

UNIT-III (इकाई-III)

- 18.(a) A particle is projected from the lowest point of a vertical circle with a velocity just sufficient to carry it to the highest point. Find when and where the particle will leave the circle.

एक कण उर्ध्वाधर वृत्त के निम्नतम बिन्दु से ऐसे वेग से फेंका जाता है जो उसे ठीक सर्वोच्च बिन्दु तक ले जा सके तो वह वृत्त को कब व कहाँ छोड़ेगा?

- (b) Discuss the motion of a particle which slides down the arc of a smooth cycloid whose axis is vertical and vertex downward.

एक कण की गति की विवेचना कीजिए जो एक ऐसे चक्रज पर फिसलता है, जिसकी अक्ष उर्ध्वाधर है और शीर्ष निम्नतम है।

Or

- (a) Find the law of force towards the pole under which the curve $r^n = a^n \cos n \theta$ can be described.

ध्रुव की ओर निर्दिष्ट बल नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण वक्र $r^n = a^n \cos n \theta$ निर्मित करता है।

- (b) A ball falls from a height h upon a fixed horizontal plane. If e be the coefficient of restitution, and before it has finished rebounding, prove that :

(i) Whole distance travelled = $\{1 + e^2 / 1 - e^2\}h$

(ii) Total Time taken = $\{1 + e / 1 - e\} \sqrt{(2h/g)}$

(अ) चलित कुल दूरी = $\{1 + e^2 / 1 - e^2\}h$

(ब) कुल लगा समय = $\{1 + e / 1 - e\} \sqrt{(2h/g)}$