

MATHEMATICS

Third Paper : Mechanics

Time allowed ; Three hours

Maximum Marks 75 for
Science 66 for Arts.

Parts - A

1. Define force of friction. घर्षण बल को परिभाषित कीजिए।
2. For the common catenary prove that -
सामान्य कैटिनरी के लिये सिद्ध कीजिए -
 $y^2 = c^2 + s^2$
3. Define unstable equilibrium. अस्थायी सन्तुलन की परिभाषा दीजिए।
4. Show that the normal velocity of particle moving along a curve is always zero.
प्रदर्शित कीजिए कि किसी एक वक्र के अनुदिश गमन करने वाले कण का अभिलाम्बिक वेग सदैव शून्य होता है।
5. Give definition of Simple Harmonic Motion (SHM)
सरल आवर्त गति की परिभाषा दीजिए।
6. State Hooke's law for elastic string.
प्रत्यास्थ डोरियों के लिये हुक के नियम का कथन कीजिए।
7. Explain constrained motion. प्रतिबन्धित गति को समझाइये।
8. Define central force. सकेन्द्र बल को परिभाषित कीजिए -
9. State Newton's experimental law. न्यूटन के प्रयोगात्मक नियम का कथन कीजिए।
10. Write any two Kepler's laws of planetary motion.
ग्रहीय गति हेतु केपलर के कोई दो नियम लिखिए।

Parts - B

11. Find condition that a given system of forces should compound into a single force.
एक दिए बल निकाय का एक एकल बल में समानित होने की शर्त ज्ञात कीजिए।
12. Prove that the angular acceleration in the direction of motion of a point moving in a plane is -
सिद्ध कीजिए कि एक समतल में गतिमान एक कण का गति की दिशा में कोणीय त्वरण है -

$$\frac{v}{p} \frac{dv}{dS} - \frac{v^2}{p^2} \frac{dp}{dS}$$

13. If corresponding to two masses m_1 and m_2 attached to the end of a vertical elastic string T_1 and T_2 be the periods of small oscillation and a_1, a_2 the statistical extensions corresponding to these masses prove that -
यदि किसी उर्ध्वाधर प्रत्यास्थ डोरी में लगे हुए दो विभिन्न द्रव्यमान m_1, m_2 के संगत लघु दोलन के आवर्तकाल T_1 तथा T_2 हों और उनके संगत स्थैतिक विस्तार a_1 तथा a_2 हों, तो सिद्ध कीजिए कि -

$$g(T_1^2 - T_2^2) = 4\pi^2(a_1 - a_2)$$

14. A ball impinges directly upon another ball at rest and is itself reduced to rest by impact. If half of initial K.E. is destroyed in the collision, find the coefficient of restitution.

एक पिण्ड एक अन्य विरामवस्था के पिण्ड से संघट्ट करे स्वयं विरामवस्था में आ जाता है। यदि संघट्ट से आधी गतिज ऊर्जा नष्ट हो जाती हो तो प्रत्यानयन गुणांक ज्ञात कीजिए।

15. If v_1 and v_2 are velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the sun. prove that -

यदि v_1 तथा v_2 किसी ग्रह के उस समय के वेग हों जबकि वह सूर्य से क्रमशः न्यूनतम और अधिकतम दूरियों पर हों, तो सिद्ध कीजिए।

$$(1 - e)v_2 = (1 + e)v_1$$

Parts - C

Unit - I

16. (a) A heavy uniform rod 30 cms long is suspended from a fixed point by string fastened to its ends, their lengths being 18 cms and 24 cms. If the rod is inclined to the vertical at an angle θ , prove that -

एक एकसमान 30 सेमी. लम्बी छड़ एक नियत बिन्दु से दो रस्सियों द्वारा लटकाई गई है जो छड़ के सिरों पर बंधी हुई है। यदि रस्सियों की लम्बाई 18 सेमी. और 24 सेमी. हो तथा साम्यावस्था में छड़ उर्ध्वाधर से कोण θ बनाती हो तो सिद्ध करो कि -

$$25 \sin \theta = 24$$

- (b) One end of a heavy uniform rod AB can slide along a rough horizontal rod AC to which it is attached by a ring: B and C are joined by a string. When the rod is just on the point of slipping, the string is perpendicular to the rod which makes an angle α with the vertical, prove that the coefficient of friction is given by -

एक भारी एवं एक समान दण्ड AB का सिरा A एक रूक्ष क्षैतिज दण्ड AC पर फिसल सकता है। B और C को एक डोरी द्वारा बाँध दिया जाता है। जब AB फिसलने की अवस्था में होती है तो डोरी AB पर समकोण बनाती है और AB उर्ध्वाधर से कोण α बनाती है सिद्ध कीजिए कि घर्षण गुणांक -

$$\mu = \frac{\tan \alpha}{2 + \tan^2 \alpha}$$

OR

16. (a) If the end links of a uniform inextensible string of length l hanging freely under gravity slide along a fixed rough horizontal rod whose coefficient of friction is μ , show that at most they can rest at a distance.

l लम्बाई की एक एकसमान अविस्तार्य डोरी के सिरों पर लगी कड़ियाँ स्थिर रूक्ष क्षैतिज दण्ड पर फिसलती हैं, जिसका घर्षण गुणांक μ है। सिद्ध कीजिए कि ये सिरे विरामवस्था में निम्न दूरी पर होंगे-

- (b) Six equal heavy rods freely hinged at their ends form a regular hexagon ABCDEF which when hung up by the point A is kept from altering its shape by two light rods BF and CE. Find the thrusts of these rods.
छः समान भारी छड़ें स्वतन्त्रतापूर्वक सिरों पर जुड़ी हुई हैं और एक समषटभुज ABCDEF बनाती है। इसे A द्वारा लटकाया जाता है और दो भारहीन छड़ों BF तथा CE द्वारा इस आकृति को अपरिवर्तित रखा जाता है। इन छड़ों में प्रणोद ज्ञात कीजिए।

Unit - II

17. (a) A particle describes equiangular spiral $r = ae^{m\theta}$ with constant speed. Find the radial and transverse components of its velocity and acceleration.
एक कण समान कोणिक सर्पिल $r = ae^{m\theta}$ में समान चाल से चलता है। इसके अरीय और अनुप्रस्थ वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिए।
- (b) A particle is performing SHM of period T about a centre O and it passes through a point P distant b from O with velocity V in the direction OP. Prove that the time which elapses before it returns to P is

यदि एक कण केन्द्र O के दोनों ओर T आवर्तकाल की SHM करे और वह किसी बिन्दु P (जहाँ $OP = b$) में से OP की दिशा में वेग V से गुजरे तो सिद्ध कीजिए कि वह पुनः P पर समय के पश्चात लौटेगा।

$$\frac{T}{\pi} \tan^{-1} \frac{VT}{2\pi b}$$

OR

17. (a) A particle of mass m is falling under gravity through a medium whose resistance is u times the velocity. If the particle is released from rest, show that the distance fallen through in time t is -
m संहति का एक कण गुरुत्वाकर्षण के अधीन एक ऐसे माध्यम में होकर गिरता है जिसका प्रतिरोध वेग के गुने के बराबर है। यदि कण विरामवस्था से गिराया जाये तो सिद्ध कीजिए कि समय से तय की गई दूरी है -

$$\frac{gm^2}{\mu^2} \left[e^{-\mu t} - 1 + \frac{\mu t}{m} \right]$$

- (b) A particle of mass m executes SHM in line joining two points A and B on a smooth table and is connected with these points by elastic strings whose tensions in equilibriums are each T. Show that the time of an

oscillation $2\pi \sqrt{\left(\frac{m\ell\ell^1}{T(\ell + \ell^1)} \right)}$ where ℓ and ℓ^1 are extensions of the strings beyond their natural lengths.

m द्रव्यमान का एक कण, एक चिकने मेज पर स्थित दो बिन्दुओं A तथा B को मिलाने वाली रेखा पर SHM से गतिमान है और वह इन बिन्दुओं से प्रत्यास्थ

डोरियों द्वारा बंधा हुआ है जिसका प्रत्येक का तनाव सन्मुलन की दशा T है। सिद्ध

कीजिए कि एक दोलन का समय $2\pi \sqrt{\left(\frac{m\ell\ell'}{T(\ell+\ell')}\right)}$ है, जहाँ ℓ तथा ℓ' स्वाभाविक लम्बाई के अतिरिक्त डोरियों में विस्तार है।

Unit - III

18. (a) Discuss the motion of a particle which slides from rest from the highest point of smooth vertical circle.

एक चिकने उर्ध्वाधर वृत्त के उच्चतम बिन्दु से विरामवस्था से फिसलने वाले किसी कण की गति कि विवेचना कीजिए।

- (b) A particle slides down a smooth cycloid starting from rest at the cusp, the axis being vertical and vertex downwards. Prove that it describes half of the path to the lowest point in two third time to the lowest point.

एक कण एक ऐसे चक्रज के चाप पर नीचे की ओर फिसलता है जिसकी अक्ष उर्ध्वाधर तथा शीर्ष निम्नतम है। यदि कण अभयाग्र से विरामवस्था से चलता हो तो सिद्ध कीजिए कि उसके शीर्ष के प्रथम आधे पथ के चलने का समय उसके शीर्ष तक पहुँचने के समय का दो तिहाई होगा।

OR

18. (a) Find the law of force towards the pole under which a particle describes equiangular spiral curve $r = ac^{\theta \cot \alpha}$.

ध्रुव की ओर निर्दिष्ट बल नियम ज्ञात कीजिए जिसके अधीन कोई कण समान कोणिक सर्पिल वक्र $r = ac^{\theta \cot \alpha}$ निर्मित करता है।

- (b) Three equal balls are in a straight line on a table and one of them moves towards the other two which are at rest and not in contact; if

$e = \frac{1}{2}$, find how many impact will take place and show that the ultimate speeds of the balls are in the ratios 13 : 15 : 36

एक मेज पर तीन समान गोले एक सरल रेखा में विरामावस्था में रखे हैं। उनमें से एक अन्य दो गोलों की ओर चलना प्रारम्भ करता है जो संपर्क में नहीं है। यदि

$e = \frac{1}{2}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि उनके अन्तिम वेग 13 : 15 : 16 के अनुपात में होंगे।