

44x - 58y + 71 = 0. Also find the focus, eccentricity and length of latus rectum.

T.3 H.

Calculus II Paper

M.M. 75

भाग-अ

1. सिद्ध कीजिए कि वक्र  $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ , में स्पर्शी, ध्रुवान्तर रेखा से एक अचर कोण पर झुकी है। Prove that for the curve  $r = ae^{\theta \cot \alpha}$ , the tangent is inclined at a constant angle with the radius vector.

2. सिद्ध कीजिए कि वक्र  $P = f(r)$  की ध्रुव से गुजरने वाली वक्रता जीवा की लम्बाई  $2f(r)/f'(r)$  है।

Show that the cord of curvature through the pole for the curve  $P = f(r)$  is  $2f(r)/f'(r)$ .

3. सम्पूर्ण अवकल गुणांक को परिभाषित कीजिए।

Define Total Differential Coefficient.

4. फलन  $f(x, y)$  के चरम मान की कसौटी दीजिए।

Give criteria for extreme values of  $f(x, y)$ .

5. निर्देशाक्षों के समान्तर अनन्तस्पर्शी परिभाषित कीजिए।

Define Asymptotes parallel to the axes.

6. नति परिवर्तन बिन्दु को परिभाषित कीजिए तथा इसके लिए परीक्षण लिखिए।

Define point of inflexion and also write the test for it.

7. वृत्त  $x^2 + y^2 = a^2$  के लिए परिमाण ज्ञात कीजिए।

Find the perimeter of the circles  $x^2 + y^2 = a^2$ .

8. ज्ञात कीजिए : Evaluate :  $\int (-15/2)$ .

9. निम्न द्वि-समाकलन का क्रम बदलिए :

Change the order of integration of the following double integral :

$$\int_0^a \int_0^x f(x, y) dx dy.$$

10. डिरिचलेट्स समाकल लिखिए। Write Dirichlet's Integral.

भाग-ब इकाई-I 1. (अ) यदि  $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$ , तो सामान्य संकेतन से प्रदर्शित कीजिए :

If  $\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$ , then with usual notations, show that :  $\frac{ds}{d\psi} = \frac{2a}{\sin^3 \psi}$

(ब) सिद्ध कीजिए कि वक्रता केन्द्र के निर्देशांक को किसी बिन्दु पर  $x - \frac{dy}{d\psi}$  तथा

$y + \frac{dx}{d\psi}$  के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

Prove that the coordinates of the centre of curvature at any point  $(x, y)$  can be expressed in the form  $x - \frac{dy}{d\psi}$  and  $y + \frac{dx}{d\psi}$

इकाई II. 2. (अ) यदि if  $z = x^2 \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) - y^2 \tan^{-1} \left( \frac{x}{y} \right)$  सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(ब) निम्नतम मान ज्ञात कीजिए। Show that minimum value of :

अथवा /OR

$$\mu = xy + \left(\frac{a^3}{x}\right) + \left(\frac{a^3}{y}\right) \text{ is } 3a^2$$

इकाई III. 3. (अ) निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शिया ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि वे वक्र तथा दीर्घवृत्त  $x^2 + 4y^2 = 4$  के प्रतिच्छेद बिन्दुओं से गुजरती हैं :

Find the asymptotes of the following curve and show that they pass through the point of intersection of the curve with the ellipse  $x^2 + 4y^2 = 4$  :

$$4(x^2 + y^4) - 17x^2y^2 - 4x(4y^2 - x^2) + 2(x^2 - 2) = 0. \quad \text{अथवा / OR}$$

(ब) दिए गए वक्र का अन्वलीप ज्ञात कीजिए, जब if  $a^n + b^n = c^n$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

इकाई IV. 4. (अ) सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलयिक सर्पिल  $r\theta = a$  के चाप की लम्बाई बिन्दु  $r = a$  से बिन्दु  $r = 2a$  तक है : Show that the length of the arc of the hyperbolic spiral  $r\theta = a$  taken from the point  $r = a$  to  $r = 2a$  is :

$$\left\{ \sqrt{5} \sqrt{2 + \log \frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{1 - \sqrt{5}}} \right\} a$$

अथवा / OR

(ब) दिखाइये कि : Show that :

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

इकाई V. 5. (अ) समाकलन का क्रम बदलिए : Change the order of integration :

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} V dx dy$$

(ब)  $\iiint_V (2x + y) dx dy dz$  ज्ञात कीजिए जहाँ V बन्द क्षेत्र है तथा सिलिंडर  $z = 4 - x^2$  तथा तलों तथा  $x = 0, y = 0, y = 2$  तथा  $z = 0$  से घिरा हुआ है ।

Evaluate  $\iiint_V (2x + y) dx dy dz$ , where V is the closed region bounded by the cylinder  $z = 4 - x^2$  and the planes  $x = 0, y = 0, y = 2$  and  $z = 0$ .

भाग-स 1. यदि वक्र का ध्रुवी समीकरण  $r = f(\theta)$  हो और यदि  $\mu = 1/r$ , तो सिद्ध कीजिए कि वक्रता  $\left(\mu + \frac{d^2\mu}{d\theta^2}\right) \sin^3 \phi$  होगी । फलतः या अन्यथा सिद्ध कीजिए कि वक्रता  $\frac{1}{r} \frac{dp}{dr}$  से प्राप्त

होती है । If the polar equation of the curve is  $r = f(\theta)$  and  $\mu = 1/r$ , then prove that the curvature is equal to  $\left(\mu + \frac{d^2\mu}{d\theta^2}\right) \sin^3 \phi$ . Hence or otherwise

prove that the curvature is given by  $\frac{1}{r} \frac{dp}{dr}$

2.  $x^2 + y^2 + z^2$  के उच्चतम तथा निम्नतम मान निम्न शर्ताधीन ज्ञात कीजिए :

Find the maxima and minima of  $x^2 + y^2 + z^2$  subject to the conditions :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1 \text{ and } lx + my + nz = 0.$$

3. निम्न वक्र का अनुरेखण कीजिए : Trace the following curve :

$$x^2y^2 = (1+y)^2(4-y^2).$$

4. सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a \cos^4 \theta + b \sin^4 \theta}} = \frac{[\Gamma(1/4)]^2}{4(ab)^{1/4} \cdot \sqrt{2\pi}}$$

5. निम्न समाकलन को ध्रुवीय निर्देशांकों में बदलकर मान ज्ञात कीजिए ।

Evaluate the following integral by changing to polar coordinates :

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{(x^2+y^2)} dx dy.$$