

भाग-अ 1. (i) यदि शंकु का शीर्ष मूल बिन्दु, अक्ष z-अक्ष और अर्ध शीर्ष-कोण θ हो तो शंकु का समीकरण लिखिये। Write the equation of cone whose vertex is origin, z-axis is the axis and semi-vertical angle is θ .

(ii) लम्बवृत्तीय बेलन तथा निर्देशक वृत्त को परिभाषित कीजिए।
Define right circular cylinder and guiding circle.

(iii) किसी शांकव के ध्रुव एवं ध्रुवीय तल की परिभाषा दीजिए।
Define the Pole and Polar plane to any conicoid.

(iv) नियामक गोले को परिभाषित कीजिए एवं समीकरण लिखिए।
Define the director sphere and write equation.

(v) परवलज $ax^2 + by^2 = 2cz$ के परिच्छेद जिसका केन्द्र (x_1, y_1, z_1) है, का समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equation of the plane of the section of the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$ whose centre is (x_1, y_1, z_1) .

(vi) व्यासग समतल की परिभाषा व समीकरण लिखिए।
Define diametral plane and write equation.

(vii) दीर्घवृत्तज के परिच्छेद का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
Find the area of section of the ellipsoid.

(viii) शांकबज के शून्य वृत्तक की परिभाषा दीजिए।
Define umbilics of a conicoid.

(ix) पृष्ठ $f(x, y, z) = c$ (जहाँ c अचर है) के बिन्दु p पर स्पर्श समतल का समीकरण लिखिए। Write the vector equation of tangent plane at point P to the surface $f(x, y, z) = c$ (where c is a cons.).

(x) किसी भी बन्द पृष्ठ S के लिए सिद्ध कीजिए $\int_S \mathbf{r} \cdot \hat{n} \, ds = 3V$ जहाँ बन्द पृष्ठ S से घिरा हुआ आयतन V है। For any closed surface S, show that $\int_S \mathbf{r} \cdot \hat{n} \, ds = 3V$ where V is the volume enclosed by surface S.

भाग-ब इकाई-I. r_1 और r_2 त्रिज्या के दो गोले लाम्बिक रूप से काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या है। Two spheres of radii r_1 and r_2 cut orthogonally, prove that the radius of their common circle is $r_1 r_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

(ब) प्रदर्शित कीजिए कि निर्देशी समतलों को स्पर्श करने वाले शंकु का व्यापक समीकरण है : Show that the general equation to a cone which touches the co-ordinates plane is :
अथवा / OR

$$\frac{a^2x^2}{a^2} + \frac{b^2y^2}{b^2} + \frac{c^2z^2}{c^2} - 2bcz - 2cazx - 2abxy = 0$$

$$\text{or } \sqrt{ax} \pm \sqrt{by} \pm \sqrt{cz} = 0$$

इकाई II. 3. (अ) यदि मूल बिन्दु से दीर्घवृत्तज के $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ स्पर्श समतलों पर इस प्रकार लम्ब डाले जाएँ कि काटे गये अन्तःखण्डों के व्युत्क्रमों का योग अचर $\frac{1}{k}$ हो, तो लम्ब का बिन्दु पथ होगा : Show that the locus of the perpendiculars from the origin to the tangent planes to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ which cut off from the axes intercepts the sum of whose reciprocals is equal to a constant $\frac{1}{k}$ is

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = k^2(x + y + z)^2$$

4. शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के अन्वालोपी बेलन का तल $z = 0$ द्वारा परिच्छेद आयतीत अतिपरवलय प्राप्त होते हैं। प्रदर्शित कीजिए कि उनके स्पर्श तल पर केन्द्रीय लम्ब शंकु जनित करते हैं : Enveloping cylinders of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ met the plane $z = 0$ in rectangular hyperbolas; show that the central perpendiculars to them is plane of contact generate the following cone : $\frac{bx^2}{a} + \frac{ay^2}{b} + \frac{(a+b)z^2}{c} = 0$

इकाई III. 5. दीर्घवृत्तज के तीन संयुग्मी अर्धव्यासों के छोरों से गुजरने वाले समतल का समीकरण

ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि यह स्थिर गोले को स्पर्श करता है।

Find the equation of the plane through the extremities of three conjugate semi-diameters of an ellipsoid and show that it touches a fixed sphere. अथवा

6. प्रदर्शित कीजिए कि समतल $lx + my + p = 0$ तथा $l'x + m'y + p' = 0$ परवलय $ax^2 + by^2 = 2cz$ के संयुग्मी व्यासगत तल है यदि : Show that the planes $lx + my + p = 0$ and $l'x + m'y + p' = 0$ are conjugate planes of the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$ if

$$\frac{ll'}{a} + \frac{mm'}{b} = 0.$$

7. प्रदर्शित कीजिए कि पृष्ठ $yz + zx + xy = a^2$ समतल $lx + my + nz = p$ द्वारा परिच्छेद परवलय है यदि $\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$. Show that the section of the surface $yz + zx$ by the plane $lx + my + nz = p$ is parabola if $\sqrt{l} + \sqrt{m} + \sqrt{n} = 0$. अथवा/OR

8. शांकलवज के वास्तविक वृत्तीय परिच्छेद ज्ञात कीजिए।
Find the real circular sections of the conicoid:

$$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2zx = 4.$$

इकाई V. 9. सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$\nabla^2 f(\vec{r}) = f''(\vec{r}) + \frac{2}{r} f'(\vec{r}).$$

8. यदि f परिनालिका सदिश है तो सिद्ध करो कि :

If f is a solenoidal vector, show that :

$$\text{curl curl curl curl } f = \nabla^4 f.$$

भाग-स 1. (अ) सिद्ध कीजिए कि गोला $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ एवं गोला $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 40z + 225 = 0$ बाह्य स्पर्श करते हैं, उनके उभयनिष्ठ बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करो। Show that the spheres $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ and $x^2 + y^2 + z^2 - 18x - 24y - 40z + 225 = 0$ touch extremally, find the co-ordinates of their common point.

(ब) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के अन्चालोपी बेलन का समीकरण ज्ञात करे जिसकी जनक रेखाएँ $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ के समान्तर है।

Find the equation of a cylinder which envelopes the surface $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ and has generators parallel to the line $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$

2. (अ) केन्द्रीय शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ पर समतल $lx + my + nz = 0$ के समान्तर दो स्पर्शतलों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the two tangent planes to their central conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ which are parallel to the plane $lx + my + nz = 0$.

(ब) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के स्पर्शतल पर केन्द्र से लम्ब डाला गया है। सिद्ध करो कि लम्ब के पाद का बिन्दुपथ है : Prove that the locus of the foot of the perpendicular drawn from the centre of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ to

any of its tangent planes is : $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

3. (अ) प्रदर्शित कीजिए कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर बिन्दु (x_1, y_1, z_1) से खींची गई छः अभिलम्ब एक द्विक कोटि के शंकु पर स्थित होती है। Show that the six normals from (x_1, y_1, z_1) to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ lie on a cone of the

second degree.

(ब) प्रदर्शित करो कि परवलय $x^2 + y^2 = 2az$ पर (α, β, γ) से खींची अभिलम्बों के पादों से गुजरने वाले वृत्त का केन्द्र है : Show that the centre of the circle through the feet of the three normals from the point (α, β, γ) to the

12 / B. A. / B. Sc. (Part-I) MATHEMATICS

paraboloid $x^2 + y^2 = 2az$ is $(\frac{\alpha}{4}, \frac{\beta}{4}, \frac{\gamma + \alpha}{2})$

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि एक परवलज के दो वास्तविक शून्य वृत्तक होते हैं।

Show that a paraboloid has two real umbilics.

(ब) बिन्दु $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$ से गुजरने वाले एक पृष्ठीय अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

की जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equation to the generators of the hyperboloid of one sheet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ which pass through the points

$(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$

5. (अ) प्रदर्शित कीजिए कि यदि $(xyz)^h (x^a i + y^a j + z^a k)$ आघूर्णिय सदिश है तब या तो $b = 0$ या $a = -1$. Show that if $(xyz)^h (x^a i + y^a j + z^a k)$ is irrotational vector then either $b = 0$ or $a = -1$.

(ब) स्टॉक प्रमेय द्वारा निम्न का मान ज्ञात कीजिए जहाँ $C; x^2 + y^2 = 1; z = y^2$ वक्र है :

Evaluate the $\int_C (yz dx + xz dy + xy dz)$ by stroke's theorem where :

C is the curve $x^2 + y^2 = 1; z = y^2$