

Co-ordinate Geometry of Three Dimensions and Vector Calculus

T. 3 H.

Third Paper

M. M. 75

भाग-अ 1. (i) गोले के ध्रुव तथा ध्रुवीय समतल की परिभाषा दीजिए ।

Define the Pole and Polar plane of Sphere.

(ii) अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिए । Define the Enveloping Cone.

(iii) समतल $lx + my + nz = p$ को सकेन्द्र शांकवज $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ का स्पर्श-तल होने का प्रतिबन्ध बताइए । Show the condition that the plane $lx + my + nz = p$ is a tangent plane to the conicoid $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$.

(iv) अनन्तस्पर्शीय शंकु को परिभाषित कीजिए । Define Asymptotic Cone.

(v) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु (x_1, y_1, z_1) पर दिक्कोज्याओं के पदों में अभिलम्ब का समीकरण लिखिए । Write the equation of normal in terms of direction cosines of ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (vi) समतल $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ तथा $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, परवलयज $ax^2 + by^2 = 2cz$ के संयुग्मी व्यास का प्रतिबन्ध लिखिए । Write the condition for the paraboloid $ax^2 + by^2 = 2cz$ for which the planes $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ and $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ are the conjugate diametral planes.(vii) दीर्घवृत्तज $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 8$ के वास्तविक केन्द्रीय वृत्तीय परिच्छेद कीजिए ।Write the real central circular sections of the ellipsoid $x^2 + 2y^2 + 6z^2 = 8$.

(viii) विकासनीय पृष्ठ को परिभाषित कीजिए । Define the Developable surface.

(ix) यदि एक अदिश बिन्दु फलन f अचर हो तो ∇f का मान बताइए ।If f is a scalar point function then value of ∇f is.

(x) स्टोक्स प्रमेय का समतल (xy-तल) पृष्ठ के लिए कार्तीय रूप में सूत्र लिखिए । Write the Cartesian form for the plane surface (xy-plane) is Stoke's theorem.

भाग-ब इकाई-I. 1. उस चतुष्फलक को परिगत करने वाले गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके फलक हैं । Find the equation of the sphere circumscribing the tetrahedron whose faces are $x = 0, y = 0, z = 0$ and $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ अथवा2. उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष (α, β, γ) और आधार $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$ है । Find the equation of the cone whose vertex is (α, β, γ) and base is $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$.इकाई II. 3. सकेन्द्र शांकवज $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$ के तीन पारस्परिक लम्ब स्पर्श तलों के प्रतिच्छेदन बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए ।

Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to the central conicoid $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$. अथवा/OR

4. शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ की जीवाओं के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु (α, β, γ) से गुजरती है। Find the locus of the middle points of chords of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ which pass through the point (α, β, γ) .

इकाई III. 5. दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के बिन्दु $P(x_1, y_1, z_1)$ पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equations of the normal at the point $P(x_1, y_1, z_1)$ of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ अथवा/OR

6. दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के तीन बराबर लम्बाई वाले संयुग्मी-अर्द्धव्यासी का पथ ज्ञात कीजिए। Find the locus of the equal conjugate semi-diameters of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

इकाई IV. 7. शांकवज $14x^2 + 6y^2 + 9z^2 = 3$ का समतल $x + y + z = 0$ द्वारा प्राप्त परिच्छेद के अक्षों की लम्बाईया तथा दिक्कोज्याएँ ज्ञात कीजिए।

Find the length and direction cosines of the axes of section of the conicoid $14x^2 + 6y^2 + 9z^2 = 3$ by the plane $x + y + z = 0$. अथवा/OR

8. अतिपरवलयज $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ के बिन्दु $(-1, 0, 3)$ से गुजरने वाली जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equations to the generating lines of the hyperboloid $yz + 2zx + 3xy + 6 = 0$ which pass through the point $(-1, 0, 3)$.

इकाई V. 9. यदि $\vec{V} = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ हो तो $\text{div } \nabla$ तथा $\text{curl } \nabla$ ज्ञात कीजिए। Find $\text{div } \nabla$ and $\text{curl } \nabla$, where $\vec{V} = \nabla(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$. अथवा

10. समाकलन $\int_C (xy + y^2) dx + x^2 dy$, जहाँ C रेखा $y = x$ तथा परवलय $y = x^2$ द्वारा परिबद्ध किया एक बन्द क्षेत्र है, का मान ग्रीन प्रमेय द्वारा ज्ञात कीजिए।

Evaluate by Green's theorem in the plane for $\int_C (xy + y^2) dx + x^2 dy$, where C is the closed curve of region bounded by $y = x$ and $y = x^2$.

भाग-स 1. (अ) मूल बिन्दु से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो गोले $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z - 3 = 0$ को $(1, 1, -1)$ पर स्पर्श करता है।

Find the equation of the sphere which touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z - 3 = 0$ at the point $(1, 1, -1)$ and passes through the origin.

(ब) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देश वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$ है। Find the equation of the right circular cylinder whose guiding circle is $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - y + z = 3$.

2. (अ) शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के सापेक्ष निम्न सरल रेखाओं के ध्रुवीय रेखाएँ होने की शर्त ज्ञात कीजिए : Find the condition that the following lines must be polar lines with respect to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

$$\frac{x - \alpha}{l} = \frac{y - \beta}{m} = \frac{z - \gamma}{n}; \quad \frac{x - \alpha'}{l'} = \frac{y - \beta'}{m'} = \frac{z - \gamma'}{n'}$$

(ब) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के अन्वालोपी बेलन, जिनकी जनक रेखाएँ, रेखा $\frac{x}{0} = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{z}{c}$ के समान्तर हैं, समतल $z=0$ को वृत्तों में काटती है।

Prove that the enveloping cylinder of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, whose generators are parallel to the line $\frac{x}{0} = \pm \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{z}{c}$, meet the plane $z=0$ in circles.

3. (अ) सिद्ध कीजिए कि (α, β, γ) से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर खींचे गये छः अभिलम्बों के पाद दीर्घवृत्तज तथा शंकु $\frac{a^2(b^2 - c^2)\alpha}{x} + \frac{b^2(c^2 - a^2)\beta}{y} + \frac{c^2(a^2 - b^2)\gamma}{z} = 0$ के प्रतिच्छेदन वक्र पर स्थित हैं। Prove that the feet of six normals from (α, β, γ) to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ lie on the curve of intersection of the ellipsoid and the cone. $\frac{a^2(b^2 - c^2)\alpha}{x} + \frac{b^2(c^2 - a^2)\beta}{y} + \frac{c^2(a^2 - b^2)\gamma}{z} = 0$

(ब) बिन्दु (α, β, γ) से इसके परवलयज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ सापेक्ष ध्रुवीय तल पर डाले गये लम्ब का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए। Find the locus of the perpendicular from (α, β, γ) to its polar plane with respect to paraboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$.

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का शंकु $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{a+c} + \frac{z}{a+b} = 0$ के स्पर्श-तल द्वारा परिच्छेद आयातीय अतिपरवलय है। Prove that the section of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ by a tangent plane to cone $\frac{x}{b+c} + \frac{y}{a+c} + \frac{z}{a+b} = 0$ is a rectangular hyperbola.

(ब) निम्न दीर्घवृत्तज के शून्य वृत्तक ज्ञात कीजिए : Find the umbilics of the following ellipsoid : $2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 6$.

5. (अ) Find the values of the constants a, b, c so that the directional derivative $\phi = axy^2 + byz + cz^2x^2$ at $(1, 2, -1)$ has maximum magnitude 64 in the direction parallel to z -axis.

(ब) गॉस अपसरण प्रमेय द्वारा $\int_S \{(x^3 - yz) dydz - 2x^2y dzdx + z dx dy\}$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ S , एक घन जो कि निर्देशी समतलों तथा $x = y = z = a$ तलों से घिरा हुआ है।