## Co-ordinate Geometry of Three Dimensions and Vector Calculus

**T. 3 H.** **Third Paper** **M. M. 75**

**भाग–अ Part-A.** 1.(i) गोले की त्रिज्या व केन्द्र ज्ञात कीजिए : Find the radius and centre of the sphere : $ax^2+ay^2+az^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

(ii) उस प्रतिबन्ध को लिखो कि द्विघाती व्यापक समीकरण, एक शंकु प्रदर्शित करे। Write the condition for the general equation of second degree to represent a cone.

$ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy+2ux+2vy+2wz+d=0$

(iii) शांकवज के ध्रुव और ध्रुवीय समतल की परिभाषा दीजिए।
Define the pole and polar plane of conicoid.

(iv) अन्वालोपी बेलन को परिभाषित कीजिए। Define Enveloping cylinder.

(v) दीर्घवृतज पर अभिलम्ब को परिभाषित कीजिए।
Define the normal to an ellipsoid.

(vi) शांकवज का व्यासीय समतल को परिभाषित कीजिए।
Define the Diameteral plane of conicoid.

(vii) शून्य वृतक को परिभाषित कीजिए। Define Umbilics.

(viii) अविकासनीय पृष्ठ को परिभाषित कीजिए। Define the skew-surface.

(ix) यदि $r = xi + yj + zk$ तो सिद्ध कीजिए कि grad $r = \hat{r}$ ।
If $r = xi + yj + zk$ then prove that grad $r = \hat{r}$ .

(x) गॉस की अपसरण प्रमेय को परिभाषित कीजिए।
Define the Gauss divergence theorem.

**भाग–ब Part-B.इकाई I.** 1. उस शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(\alpha, \beta, \gamma)$ और आधार $ax^2 + by^2 = 1, z = 0$. Find the equation of cone whose vertex

$(\alpha, \beta, \gamma)$ and base is $ax^2+by^2=1, z=0$.

2. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के अन्वालोपी बेलन के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका जनक रेखाएँ $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ के समान्तर है।

Find the equation of an enveloping cylinder of the surface $ax^2 + by^2 + cz^2=1$ and whose generators are parallel to the line $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

**इकाई II.** 3. समतल $lx+my+nz=p$ को सकेन्द्र शांकवज $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ का स्पर्श-तल होने के लिए प्रतिबन्ध ज्ञात करो। Find the condition for plane $lx+my+nz=p$ is a tangent plane to the conicoid $Ax^2+By^2+Cz^2=1$.

4. दीर्घवृतज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के अन्वालोपी शंकु, जिसका शीर्ष P है, का समतल $z=0$ से प्रतिच्छेद एक समकोणिकअतिपरवलय है,सिद्ध कीजिए कि P का पथ $\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ होगा

The section of the enveloping cone of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ where vertex is P, by the plane $z = 0$ is a rectangular hyperbola. Prove the locus of P is $\frac{x^2+y^2}{a^2+b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

**इकाई III.** 5. यदि दीर्घवृतज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ में बिन्दु P पर अभिलम्ब पर बिन्दु Q इस प्रकार है कि $3PQ=PG_1+PG_2+PG_3$ जहाँ $G_1\, G_2\, G_3$ वे बिन्दु हैं जिन पर P के अभिलम्ब मुख्य तलों को मिलता है। सिद्ध करो कि बिन्दु Q का बिन्दु पथ

If Q is any point on the normal at P to ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ such that $3PQ=PG_1+PG_2+PG_3$ where $G_1\, G_2\, G_3$ are the points in which the normal at P meets the principal planes. Prove that the locus of Q

$$\frac{a^2x^2}{(2a^2-b^2-c^2)^2}+\frac{b^2y^2}{(2b^2-c^2-a^2)^2}+\frac{c^2z^2}{(2c^2-a^2-b^2)^2}=\frac{1}{9}$$

6. बिन्दु $(x_1, y_1, z_1)$ से, इसके परवलजय $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ के सापेक्ष ध्रुवीय तल पर डाले गये लम्ब का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए। Find the locus of the perpendicular from $(x_1, y_1, z_1)$ to its polar plane with respect to paraboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$.

**इकाई IV.** 7. प्रदर्शित कीजिए कि पृष्ठ $yz+zx+xy=a^2$ समतल $lx+my+nz=p$ द्वारा परिच्छेद परवलय है यदि $\sqrt{l}+\sqrt{m}+\sqrt{n}=0$.

Show that the section of surface $yz + zx + xy = a^2$ by the plane $lx+my+nz=p$ is a parabola, if $\sqrt{l}+\sqrt{m}+\sqrt{n}=0$.

8. दीर्घवृतज $2x^2+3y^2+6z^2=6$ के शून्य वृतज ज्ञात कीजिए।

Find the umbilics of ellipsoid $2x^2+3y^2+6z^2=6$.

**इकाई V.** 9. सिद्ध कीजिए कि : Prove that : $\nabla^2 f(r)=f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)$

10. सिद्ध करो : Prove that : $\int_S (ax\,i+by\,j+cz\,k).\hat{n}\, ds=\frac{4}{3}\pi(a+b+c)$ जहाँ

where s : $x^2+y^2+z^2=1$ $\hat{n}$ = एकक अभिलम्बीय सदिश Normal Unit Vector.

**भाग-स Part-C.** 1.(a) सिद्ध कीजिए कि समतल $ax+by+cz=0$ शंकु $yz+zx+xy=0$ को लम्ब रेखाओं में काटता है यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. Prove that the plane $ax+by+cz=0$ cuts the cone $yz+zx+xy=0$ in perpendicular lines if $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

(b) सिद्ध करो कि रेखा $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}$ की गोले $x^2+y^2+z^2=1$ के सापेक्ष ध्रुवी रेखा $\frac{7x+3}{11}=\frac{2-7y}{5}=\frac{z}{-1}$ रेखा है।

Show that the polar line of $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{1}$ with respect to sphere $x^2+y^2+z^2=1$, is the line $\frac{7x+3}{2}=\frac{2-7y}{5}=\frac{z}{-1}$.

2.(a) दो समतलों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $7x+10y-30=0=5y-3z$ से जाते हो और शांकवज $7x^2+5y^2+3z^2=60$ को स्पर्श करते हो।

Find the equation to the two planes which contain the line $7x+10y-30=0=5y-3z$ and touch the conicoid $7x^2+5y^2+3z^2=60$.

(b) एक बिन्दु $(x_1, y_1, z_1)$ पर समद्विभाजित होने वाली शांकवज $Ax^2+By^2+Cz^2=1$ की जीवाओं का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए। Find the locus of chords of central conicoid $Ax^2+By^2+Cz^2=1$, which are bisected at the point $(x_1, y_1, z_1)$.

3. (a) सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृतज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ के किन्हीं तीन परस्पर लम्बवत् अर्धव्यास के व्युत्क्रमों के वर्गों का योगफल अचर होता है। Prove that the sum of squares of the reciprocals of mutually perpendicular semi-diameters of an ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ is constant.

(b) सिद्ध कीजिए कि $(x_1, y_1, z_1)$ परवलयज $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ पर अभिलम्ब शंकु

Prove that the normal from $(x_1, y_1, z_1)$ to the paraboloid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ lie on cone $\frac{x_1}{x-x_1}-\frac{y_1}{y-y_1}+\frac{a^2-b^2}{z-z_1}=0$.

4. पृष्ठ $3x^2+5y^2+3z^2+2zx=4$ के वास्तविक वृतीय प्रतिच्छेद ज्ञात कीजिए। Find the real circular sections of the surface $3x^2+5y^2+3z^2+2zx=4$.

5. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रवणता u की कुन्तल शून्य है $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}u)=0$ जहाँ u = अवकलज्य अदिश बिन्दु फलन Prove that the curl of the gradient of u is zero i.e., $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}u)=0$ where u = differentiable scalar point function.

(b) स्टॉक्स प्रमेय की फलन $F=zi+xj+yk$ के लिए सत्यापन कीजिए जहाँ C एक xy-समतल का इकाई वृत है जो $z=\sqrt{(1-x^2-y^2)}$ गोलार्ध को परिबद्ध किए हुए हैं।

Verify Stoke's theorem for function $F=zi+xj+yk$ where c is the unit circle in xy plane bounding the hemisphere $z=\sqrt{(1-x^2-y^2)}$.