

(a) (b) (c)
Co-ordinate Geometry of Three Dimensions & Vector Calculus
T. 3 H. III rd Paper M. M. 75

भाग अ PARTA 1. दो गोलों की लम्बिकता की प्रतिबन्ध लिखिए ।

Write the condition of orthogonality of two spheres.

2. बिन्दु (x, y, z) का निम्न गोले के सापेक्ष ध्रुवीय समतल का समीकरण लिखिए ।

Write the equation of the polar plane at the point (x, y, z) of the sphere.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

3. उस लम्बवृत्तीय शंकु का समीकरण लिखिए जिसका शीर्ष $(0,0,0)$ अक्ष OZ तथा अर्ध शीर्ष

B. A. / B. Sc. (Part I) MATHEMATICS, 2017 / 5

कोण θ है। Write the equations of right circular cone whose vertex is $(0,0,0)$, axis is OZ and semi vertical angle is θ .

4. लम्बवृत्तीय बेलन को परिभाषित कीजिए। Define right circular cylinder.

5. दीर्घवृत्त के बिन्दु (α, β, γ) पर स्पर्श तल का समीकरण लिखिए।

Write the equation of tangent plane at (α, β, γ) to the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

6. अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिए। Define enveloping cone.

7. परवलय पर एक दिए बिन्दु से सामान्यतः कितने अभिलम्ब खींचे जा सकते हैं ?

From a given point, How many normals can be drawn to the paraboloid.

8. शून्य वृत्तक को परिभाषित कीजिए। Define Umbilic.

9. अघूर्णीय सदिश को परिभाषित कीजिए। Define irrotational vector.

10. गॉस का अपसरण प्रमेय परिभाषित कीजिए।

Define Gauss' Divergence Theorem.

भाग ब PART B इकाई I. (अ) r_1 और r_2 त्रिज्या के दो गोले लाम्बिक रूप से काटते हैं। सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ वृत्त की त्रिज्या है- Two spheres of radii r_1 and r_2 cut orthogonally, Prove that radius of their common circle is

$$\frac{r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

अथवा / OR

(ब) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त बिन्दुओं $(a,0,0)(0,b,0)(0,0,c)$ से गुजरता है। Find the equation of a right circular cylinder whose guiding circle passes through the points $(a,0,0)(0,b,0)(0,0,c)$.

इकाई II (अ) यदि मूल बिन्दु से दीर्घ वृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के स्पर्श समतलों पर इस प्रकार लम्ब डाले जाएँ कि काटे गये अन्तः खण्डों के व्युत्क्रमों का योग अचर $1/k$ हो, तो लम्ब का बिन्दुपथ होगा।

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = k^2 (x+y+z)^2$$

Shows that the locus of the perpendicular from the origin to the tangent plane to the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ which cut off from the axes intercepts the sum of those reciprocals is equal to a constant $1/k$ is : $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = k^2 (x+y+z)^2$.

अथवा / OR

(ब) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के शीर्ष P वाले अन्वालोपी शंकु का तल $Z=0$ से परिच्छेद आयतीय अतिपरवलय है। P का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिए।

The section of the enveloping cone of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ whose vertex is P, by the plane $Z=0$ is a rectangular hyperbola. Find the locus of P.

इकाई III. (अ) दीर्घ वृत्तज के तीन संयुग्मी अर्धव्यासों के छोरों से गुजरने वाले समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा प्रदर्शित कीजिए कि यह एक स्थिर गोले को स्पर्श करता है।

Find the equation of the plane through the extremities of three conjugate semi diameter of an ellipsoid and show that it touches a fixed sphere. OR

6 / B. A. / B. Sc. (Part I) MATHEMATICS, 2017

(ब) शांकवज $ax^2 + by^2 = 2cz$ पर पाँच अभिलम्बों से गुजरने वाले शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equation of the cone through which five normals of the conicoid $ax^2 + by^2 = 2cz$ passes.

इकाई IV. (अ) निम्न पृष्ठ के वास्तविक वृत्तीय परिच्छेद ज्ञात कीजिए। Find the real circular section of the surface. $4x^2 + 2y^2 + z^2 + 3yz + zx = 1$ अथवा / OR

(ब) बिन्दु $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$ से गुजरने वाले एक पृष्ठीय अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ को जनक रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equations of the generators of the hyperboloid of one sheet $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ which pass through the points $(a \cos \alpha, b \sin \alpha, 0)$.

इकाई V. (अ) सिद्ध कीजिए $\text{div } r^n = (n+3)r^n$ फलतः प्रदर्शित कीजिए कि r^n परिनालिकीय होगा यदि $n = -3$. If $r = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ and $r = |r|$ prove that $\text{div } r^n = (n+3)r^n$ and show that r^n will be solenoidal if $n = -3$. अथवा / OR

(ब) सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$\text{div } (r \text{ grad } \frac{1}{r^3}) = \frac{3}{r^4}$$

भाग स PART C (1) बिन्दु $(1, -1, 0)$ से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि गोले $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ को बिन्दु $(1, 2, -2)$ पर स्पर्श करता है।

Find the equation of the sphere which touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 1 = 0$ at $(1, 2, -2)$ and passes through the point $(1, -1, 0)$.

(2) उस लम्बवृत्तीय बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका निर्देशक वृत्त $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 3$ है। Find the equation of right circular cylinder whose guiding curve is the circle. $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x - 2y + 2z = 3$

(3) (a) केन्द्रीय शांकवज को परिभाषित कीजिए तथा बिन्दु $p(x, y, z)$ पर स्पर्श समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Define central conicoid and find its tangent plane at $p(x, y, z)$.

(b) अन्वालोपी शंकु को परिभाषित कीजिए तथा $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के अन्वालोपी शंकु का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $A(x_1, y_1, z_1)$ है। Define enveloping cone and find its equation of the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ with its vertex at $A(x_1, y_1, z_1)$.

3 (a) सिद्ध कीजिए कि एक दिये बिन्दु (α, β, γ) से दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ पर छः अभिलम्ब खींची जा सकती है। Prove that from the given point (α, β, γ) , Six normal's in general, can be drawn to the ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

(b) सिद्ध कीजिए कि शांकवज के शून्य वृत्तक $\frac{x^2}{a+b} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a-b} = 1$ निम्न दीर्घ वृत्त के समान संयुग्मी व्यास के छोर होते हैं। $y=0$, $\frac{x^2}{a+b} + \frac{z^2}{a-b} = 1$

B. A. / B. Sc. (Part I) MATHEMATICS, 2017 / 7

Prove that the umbilics of the conicoid $\frac{x^2}{a+b} + \frac{y^2}{a} + \frac{z^2}{a-b} = 1$ are the extremities of the equal conjugate diameters of the ellipse $y=0, \frac{x^2}{a+b} + \frac{z^2}{a-b} = 1$

4. (a) दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के r_1, r_2, r_3 अर्धव्यास वाले तीन परस्पर लम्ब व्यासगतल से परिच्छेदों का क्षेत्रफल A_1, A_2, A_3 हो तो सिद्ध कीजिए If A_1, A_2, A_3 are the areas of the section of the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ by the diametral planes of three mutually perpendicular semi diameters of length r_1, r_2, r_3 prove that

$$\frac{A_1^2}{r_1^2} + \frac{A_2^2}{r_2^2} + \frac{A_3^2}{r_3^2} = z^2 \left[\frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} + \frac{a^2 b^2}{c^2} \right]$$

(b) सिद्ध कीजिए कि (α, β, γ) से दीर्घवृत्तज Prove that the feet of six normals from (α, β, γ) the ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

पर खींची छः अभिलम्बों के पाद दीर्घवृत्तज तथा शंकु के प्रतिच्छेद वक्र पर स्थित है।
lies on the curve of intersection of the ellipsoid and the cone

$$\sum \frac{a^2(b^2-c^2)}{x} = 0$$

5. (a) यदि V किसी भी बन्द पृष्ठ s द्वारा परिबद्ध आयतन हो तो सिद्ध कीजिए-
If V is the volume enclosed by any closed surface s, Show that :

$$\iint_s F n ds = 6v \text{ जहाँ } F = x \hat{i} + 2y \hat{j} + 3z \hat{k}$$

(b) $\int_c (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ c परवलय $y = \sqrt{x}$

तथा $y = x^2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र है। ग्रीन प्रमेय का सत्यापन भी कीजिए।

Evaluate $\int_c (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$ where c is the region bounded by the parabola $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$. Also verify green theorem.