B. Sc. / B. A. (Final) MATHEMATICS, 2013
Abstract Algebra
First Paper

T. 3 H. M. M. 75

नोट :- (1) प्रश्न-पत्र पाँच इकाइयों में विभाजित है । प्रत्येक इकाई में दो प्रश्न दिए हुए हैं । प्रत्येक इकाई में से केवल एक प्रश्न का उत्तर दीजिए । (2) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

इकाई I. 1. (अ) समूह के किसी अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए । यदि किसी समूह G के अवयव a की कोटि n है, तो सिद्ध कीजिए कि a^p की कोटि भी n होगी यदि p तथा n सापेक्षित अभाज्य है । Define order of an element of a group. If the order of an element a of a group G in n, then show that the order of a^p is also n provided p and n are relatively prime.

(ब) चक्रीय समूह की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि गुणांक (ग्रुपांक) और उसके जनक की कोटि बराबर होती है । Define cyclic group. Prove that the order of a finite cyclic group is same as the order of its generator.

अथवा / OR

2. (अ) क्रमचय को परिभाषित कीजिए । प्रदर्शित कीजिए कि n कोटि के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय A_n एक समूह है जिसका समूहांक $\frac{n!}{2}$ है ।

Define permutation. Show that the set A_n of all even permutations of degree n is a group of order $\frac{n!}{2}$

(ब) प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक परिमित समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्यकारिक होता है । Show that every finite group is isomorphic to some permutation group.

इकाई II. 3. (अ) उपसमूह की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि किसी नियत पूर्णांक m के पूर्णांकीय गुणजों का समुच्चय mz, पूर्णांकों के समूह (z, +) का उपसमूह है । Define subgroup. Prove that the set of all multiple of integers mz by a fixed integer m is a subgroup of (z, +).

(ब) वाम सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए । समूह (z, +) में 3z के सभी सहकुलक ज्ञात कीजिए । Define left coset. Find all the cosets of 3z in the additive group (z, +) of integers.

अथवा / OR

4. (अ) विशिष्ट उपसमूह की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि एक समूह के विशिष्ट उपसमूह के दो सहकुलक या तो असंयुक्त होंगे या समान होंगे ।

Define normal subgroup. Prove that two cosets of a normal subgroup are either disjoint or identical.

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकृतिक प्रतिबिम्ब किसी अवशेष वर्ग समूह G के तुल्यकारी होता है ।

Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group is G.

इकाई III. 5. (अ) पूर्णांकीय प्रान्त की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है । Define integral domain. Prove that the characteristics of an integral domain is either zero or a prime number.

(ब) उपवलय की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है । Define subring. Prove that the intersection of two subrings is a subring.

अथवा / OR

6. (अ) क्षेत्र की परिभाषा दीजिए । सिद्ध कीजिए कि शून्य के भाजकों से रहित एक

परिमित क्रमविनिमेय वलंय एक क्षेत्र होता है। Define Field. Prove that a finite communative ring without zero divisor is a field.

(ब) उदाहरण देकर प्रदर्शित कीजिए कि दो उपवलयों का योग एक उपवलय नहीं होता है। Give an example to show that the sum of two subrings may not be subring.

इकाई IV. 7. (अ) विभाग वलय की परिभाषा दीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R का प्रत्येक विभाग वलय या अवशेष वर्ग वलय R की समकारिक प्रतिबिम्ब होती है तथा R की प्रत्येक गुणजावली एक वलय समाकारिता की अष्टि होती है। Define Quotient Ring. Prove that every quotient ring of ring R is a homomorphic image of R and every ideal of a ring R is kernel of homomorphism.

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$।

Prove that the union of two subspace W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace iff either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

अथवा / OR

8. (अ) सिद्ध कीजिए कि एक पूर्णांक प्रान्त का भागफल क्षेत्र सबसे छोटा क्षेत्र है, जिसमें वह पूर्णांकीय प्रान्त अंतर्विष्ट (निहीत) है। Prove that the field of quotients of an integral domain is the smallest field containing it.

(ब) प्रदर्शित कीजिए कि निम्न सदिश, सदिश समष्टि $V_3(R)$ को विस्तृत करते हैं :-

Show that the following vectors generate or span the vector space $V_3(R)$:

$u_1 = (1, 2, 3), u_2 = (0, 1, 2), u_3 = (0, 0, 1)$.

इकाई V. 9. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमा वाले सदिश समष्टि का एक आधार होता है। Prove that every finite dimensional vector space has a basis.

(ब) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सदिश समष्टि समाकृतिकता की अष्टि उपसमष्टि होती है। Prove that the kernel of every vector space homomorphism is a subspace. **अथवा / OR**

10. (अ) सदिश समष्टि की विमा को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि परिमित विमीय सदिश समष्टि V के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है। Define dimension of a vector space. Prove that any two basis of a finite dimensional vector space V consists of same number of elements.

(ब) खण्ड समष्टि को परिभाषित कीजिए। यदि प्रतिचित्रण $f: V_2(R) \rightarrow V_2(R)$, जहाँ $f[(x, y)] = (y, x)$ तो सिद्ध कीजिए कि f सदिश समष्टि $V_2(R)$ से स्वयं पर एकैक समाकारिता है। Define Quotient space. If the mapping $f: V_2(R) \rightarrow V_2(R)$, defined by $f[(x, y)] = (y, x)$, then prove that f is an isomorphism of the vector space $V_2(R)$ onto itself.