B. Sc. / B. A. (Final) MATHEMATICS, 2014

Abstract Algebra

First Paper

T. 3 H. M. M. 75

नोट :- (1) प्रत्येक इकाई में से एक प्रश्न का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । (2) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

इकाई I. 1. (अ) क्रमचय को परिभाषित कीजिए । प्रदर्शित कीजिए कि n कोटि के सभी समक्रमचयों का समुच्चय A_n एक समूह है जिसका समूहांक $\frac{n!}{2}$ है ।

Define permutation. Show that the set A_n of all even permutations of degree n is a group of order $\frac{n!}{2}$.

(ब) प्रदर्शित कीजिए कि प्रत्येक परिमित समूह किसी क्रमचय समूह के तुल्यकारिक होता है । Show that every finite group is isomorphic to some permutation group.

अथवा / OR

2. (अ) समूह के किसी अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए । यदि किसी समूह G के अवयव a की कोटि n है, तो सिद्ध कीजिए कि a^p की कोटि भी n होगी यदि p तथा n सापेक्षित अभाज्य है । Define order of an element of a group. If the order of an element of a group G is n, then show that the order of a^p is also n provided p and n are relatively prime.

(ब) चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए । सिद्ध कीजिए कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि गुणांक (ग्रुपांक) और उसके जनक की कोटि बराबर होती है ।

Define cyclic group. Prove that the order of a finite cyclic group is same as the order of its generator.

इकाई II. 3. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकृतिक प्रतिबिम्ब किसी अवशेष वर्ग समूह G के तुल्यकारी होता है । Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G.

(ब) वाम सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए । समूह (Z, +) में 3Z के सभी सहकुलक ज्ञात कीजिए । Define left coset. Find all the cosets of 3Z in the additive group (Z, +) of integers.

अथवा / OR

4. (अ) सिद्ध कीजिए कि किसी नियत पूर्णांक m के पूर्णांकीय गुणजों का समुच्चय mz, पूर्णांकों के समूह (Z, +) का उपसमूह है । Prove that the set of all multiple of integers mz by a fixed integer m is a subgroup of (Z, +).

(ब) सिद्ध कीजिए कि एक समूह के विशिष्ट उपसमूह के दो सहकुलक या तो असंयुक्त होंगे या समान होंगे । Prove that two cosets of a normal subgroup are either disjoint or identical.

इकाई III. 5. (अ) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का योग एक उपवलय नहीं होता है । Show that the sum of two subrings may not be subring.

(ब) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है । Prove that the characterstics of an integral domain is either zero or a prime number.

अथवा / OR

6. (अ) सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है ।

Prove that the intersection of two subrings is a subring.

(ब) सिद्ध कीजिए कि शून्य के भाजकों से रहित एक परिमित क्रमविनिमेय वलय क्षेत्र होता है । Prove that a finite commutative ring without zero divisor is a field.

इकाई IV. 7. (अ) प्रदर्शित कीजिए कि निम्न सदिश, सदिश समष्टि $V_3(R)$ को विस्तृत करते हैं:- Show that the following vectors generator or span the vector space $V_3(R)$:- $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (0, 0, 1)$, $u_3 = (0, 1, 2)$.

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी वलय R का प्रत्येक विभाग वलय या अवशेष वर्ग वलय R की समकारिक प्रतिबिम्ब होती है । Prove that every quotient ring of ring R is a homomorphic image of R.

अथवा / OR

(अ) सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$ ।

Prove that the union of two subspace W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace iff either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

(ब) सिद्ध कीजिए कि एक पूर्णांक प्रान्त का भागफल क्षेत्र सबसे छोटा क्षेत्र है, जिसमें वह पूर्णांकीय प्रान्त अंतर्विष्ट है । Prove that the field of quotients of an integral domain is the smallest field containing it.

इकाई V. 9. (अ) यदि प्रतिचित्रण $f : V_2(R) \rightarrow V_2(R)$, जहाँ $f[(x, y)] = (y, x)$ तो सिद्ध कीजिए कि f सदिश समष्टि $V_2(R)$ से स्वयं पर एकैक समकारिता है ।

If the mapping $f : V_2(R) \rightarrow V_2(R)$, defined by $f[(x, y)] = (y, x)$, then prove that f is an isomorphism of the vector space $V_2(R)$ onto itself.

(ब) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित विमा वाले सदिश समष्टि का एक आधार होता है । Prove that every finite dimensional vector space has a basis.

अथवा / OR

10. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक सदिश समष्टि समाकृतिकता की अष्टि उपसमष्टि होती है । Prove that the kernel of every vector space homomorphism is a subspace.

(ब) सिद्ध कीजिए कि परिमित विमीय सदिश समष्टि V के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है ।

Prove that any two basis of a finite dimensional vector space V consists