B. Sc./B.A. (Final) MATHEMATICS, 2015

Abstract Algebra

T. 3 H. **First Paper** **M. M. 75**

नोट :- (1) **भाग-अ** के सभी प्रश्न अनिवार्य है। इन प्रश्नों के उत्तर प्रत्येक 30 शब्दों तक सीमित है। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है। (2) **भाग-ब** प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न (अ) अथवा (ब) का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर लगभग 250 शब्दों का हो। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है। (3) **भाग-स** इस भाग से कुल तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रत्येक प्रश्न का उत्तर लगभग 500 शब्दों का हो। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

भाग-अ 1. आबेली समूह की परिभाषा लिखिए।

Write definition of Abelian group.

2. क्रमचय की परिभाषा दीजिए। Define a permutation.

3. सिद्ध कीजिए कि : Prove that :

$$H = \{a + ib \mid a, b \in Q\}$$

समूह $(C, +)$ का उपसमूह है। is a subgroup of $(C, +)$.

4. विभाग समूह G/N ज्ञात कीजिए जबकि

Find the quotient group G/N, when

$G = < \{1, -1, i, -i\}, \cdot >$ and $N = < \{1, -1\}, \cdot >$

5. एक वलय का उदाहरण दीजिए जिनका अभिलक्षण 4 है।

Give an example of a ring whose characteristic is 4.

6. पूर्णांकीय प्रान्त परिभाषित कीजिए। Define an integral domain.

7. किसी वलय के अभाज्य गुणजावली की परिभाषा दीजिए।

Define the prime ideal of a ring.

8. सिद्ध कीजिए कि सदिशों का कोई समुच्चय जिसमें कम से कम एक शून्य सदिश हो, एकघाततः परतन्त्र होता है।

Prove that a set of vectors which contains at least one zero vector in linear dependent.

9. किसी सदिश समष्टि के आधार की परिभाषा दीजिए।

Define the basis of a vector space.

10. रैखिक रूपान्तरण की शून्य समष्टि की परिभाषा दीजिए।

Define Null space of a linear transformation.

भाग (ब) इकाई – I. 1.(अ) सिद्ध कीजिए किसी परिमित ग्रुप के प्रत्येक अवयव की कोटि परिमित एवं ग्रुप की कोटि से कम या बराबर होती है, अर्थात् $O(a) \le O(G), \forall\ a \in G$.

Prove that the order of every element of a finite group if finite and less than or equal to the order of the group i.e., $O(a) \le O(G), \forall\ a \in G$. **अथवा / OR**

(ब) यदि If $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $q = (2\ \ 3\ \ 4)$ तो then

सिद्ध कीजिए : prove that : $pqp^{-1} = (p(2)\, p(3)\, p(4))$.

इकाई – II. 2. (अ) सिद्ध कीजिए किसी ग्रुप के किन्हीं दो विशिष्ट उपग्रुपों का सर्वनिष्ठ उस ग्रुप का एक विशिष्ट उपग्रुप होता है।

Prove that the intersection of any two normal subgroups of a group in a normal subgroup.

अथवा / OR

questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

(ब) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केन्द्र Z, G का उपसमूह है, जहाँ :
For any group G, prove that its centre Z is a subgroup of G, where :

$Z = \{x \in G \mid xg = gx, \forall g \in G\}$.

इकाई -III. 3. (अ) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है। Prove that the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.

अथवा / OR

(ब) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय : $S = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c \mid a, b, c \in Q\}$ R का एक उपक्षेत्र है।

Prove that the set $S = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c \mid a, b, c \in Q\}$ is a subfield of R.

इकाई -IV. 4. (अ) पूर्णांकीय प्रान्त $J[i] = \{a + ib \mid a, b \in Z\}$ का विभाग क्षेत्र ज्ञात कीजिए। Find the field of quotients of the integral domain $J[i] = \{a + ib \mid a, b \in Z\}$.

अथवा / OR

(ब) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय Show that the set :
$W = \{(x, y, z) \mid x - 3y + 4z = 0; x, y, z \in R\}$
3-तुपलों के सदिश समष्टि $V_3(R)$ की एक उपसमष्टि है।
of 3-tuples is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

इकाई - V. 5. (अ) सिद्ध कीजिए कि सदिश समष्टि C(R) का आधार समुच्चय $S = \{\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)$ है, यदि और केवल यदि $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Prove that the set $S = \{\alpha + i\beta, \gamma + i\delta)$ is a basis set of a vector space C(R) iff $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

अथवा / OR

(ब) सिद्ध कीजिए कि $V_3(R)$ का $V_2(R)$ पर प्रतिचित्रण f, जो कि निम्न प्रकार परिभाषित है, $f[(u_1, u_2, u_3)] = (u_1, u_2)$ एक समाकृतिकता होगा तथा इसकी अष्टि $K_f = \{(0, 0, u)\}$.

Prove that the mapping $f : V_3(R) \to V_2(R)$ defined by $f[(u_1, u_2, u_3)] = (u_1, u_2)$ is a homomorphism and its Kernel $K_f = \{(0, 0, u)\}$.

भाग-स 1. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्याकारिक होता है। Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.

2. H और K किसी ग्रुप G के परिमित उपग्रुप हैं और उनकी कोटि क्रमशः 0(H) व 0(K) है, तो सिद्ध कीजिए कि : If H and K are finite subgroups of a group G and are of orders 0(H) and 0(K), respectively, then show that :

$$0(HK) = \frac{0(H).\,0(K)}{0(H \cap K)}.$$

3. सिद्ध कीजिए कि $m + n\sqrt{2}$, जहाँ m तथा n पूर्णांक हों, आकार की वास्तविक संख्याओं का समुच्चय, संख्याओं के योग एवं गुणन के लिए वलय है। क्या यह क्षेत्र हैं ?

Prove that the set of all real numbers of the form $m + n\sqrt{2}$, where m and n are integers with ordinary addition and multiplication forms a ring. Is it a field ?

4. सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों W_1 तथा W_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$.

Prove that the union of two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V is a subspace iff either $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

Scanned by CamScanner

5. सिद्ध कीजिए कि प्रतिचित्रंण $f : V_2(R) \to V_2(R)$ जहाँ $f(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ से परिभाषित है, समष्टि $V_2(R)$ पर एक तुल्याकारिता है।

Show that the mapping $f : V_2(R) \to V_2(R)$ defined by $f(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$ is an isomorphism on $V_2(R)$.

questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner