B. Sc./B.A. (Final) MATHEMATICS, 2017

T. 3 H. **Abstract Algebra** **Ist Paper** **M. M. 75**

भाग–अ 1. तुल्याकारी ग्रुप को परिभाषित कीजिए। Define Isomorphic group.

2. चक्रीय ग्रुप को परिभाषित कीजिए। Define Cyclic group.

3. विशिष्ट उपग्रुप को परिभाषित कीजिए। Define Normal Subgroup.

4. सहसमुच्चय को परिभाषित कीजिए। Define Cosets of a group.

5. विभाजन वलय को परिभाषित कीजिए। Define Division Ring.

6. पूर्णांकीय प्रान्त के अभिलक्षण को परिभाषित कीजिए। Define characteristic of an Integral domain.

7. पूर्णांकीय प्रान्त D के भागफल क्षेत्र की परिभाषा दीजिए। Define field of quotients of an Integral domain D.

8. मुख्य गुणजांवली को परिभाषित कीजिए। Define Principal Ideal of ring R.

9. सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए। Define the basis of a vector space.

10. रैखिक रूपान्तरण की कोटि को परिभाषित कीजिए। Define Rank of a Linear transformation.

भाग (ब) इकाई – I. 1.(अ) सिद्ध कीजिए कि घनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ संक्रिया के लिए आबेली ग्रुप है, जहाँ $\otimes$ निम्न प्रकार परिभाषित है। Show that the Q^+ of the positive rational numbers forms an abelion group for the composition $\otimes$ defined as

$$a \otimes b = \frac{ab}{2}, \quad \forall a, b \in Q^+$$

अथवा / OR

(ब) यदि If $\sigma = (17263584)$, $P = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix}$

तो $\sigma^{-1} P \sigma$ का मान ज्ञात कीजिए। Find $\sigma^{-1} P \sigma$

इकाई – II. 2. (अ) सिद्ध कीजिए किसी समूह के उपसमूह के कोई दो दक्षिण (वाम) सहकुलक या तो समान होंगे या असंयुक्त होंगे। Show that any two right (left) cosets of a subgroup of a group are either identical or disjoint.

अथवा / OR

(ब) यदि ग्रुप G का एक उपग्रुप H है और N ग्रुप G का एक विशिष्ट उपग्रुप है तो सिद्ध कीजिए $H \cap N$ उपग्रुप H का एक विशिष्ट उपग्रुप होता है।

If H is a subgroup of G and N is a normal subgroup of G, then show that $H \cap N$ is a normal subgroup of H.

इकाई–III. 3.(अ) सिद्ध कीजिए कि वलय R शून्य भाजक रहित होगी यदि और केवल यदि R में निरसन नियम लागू होते हैं। Prove that a ring R is without zero divisors if the cancellation laws hold in R.

अथवा / OR

(ब) सिद्ध कीजिए समुच्चय $s = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c : a, b, c, \varepsilon Q\}$ R का एक उपक्षेत्र हैं।

Prove that the Set $s = \{a + 2^{1/3}b + 4^{1/3}c : a, b, c, \varepsilon Q\}$ is a subfield of R.

इकाई –IV. 4. (अ) सिद्ध कीजिए एक क्रम विनिमेय तत्समकी वलय एक क्षेत्र होता है यदि इसकी उचित गुणजावली न हो या यह एक सरल वलय हो। Prove that a Commutative ring with unity is a field if it has no proper ideals or it is a simple ring.

अथवा / OR

(ब) किसी सदिश समष्टि V (F) का अरिक्त उपसमुच्चय W, V की उपसमाष्टि हो इसके लिए

आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध निम्न है, सिद्ध कीजिए।

The Necessary and sufficient conditions for a non void subset w of a vector space V (F) to be a subspace of V are.

(i) $w_1 \varepsilon w, w_2 \varepsilon w \Rightarrow w_1 - w_2 \varepsilon w$ (ii) $\alpha \varepsilon F, w \varepsilon w \Rightarrow \alpha . w \varepsilon w$

इकाई-V. 5.(अ) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $\{v_1, v_2, v_3\}$ जहाँ $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1)$ तथा $v_3 = (0,-3,2)$ $v_3(R)$ का आधार बनाता है।

Prove that the set $\{v_1, v_2, v_3\}$ Where $v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1)$ and $v_3 = (0,-3,2)$ forms a basis of v_3 (R).

अथवा / OR

(ब) यदि एक रैखिक रूपान्तरण $T : R^3 \rightarrow R^2$ निम्न प्रकार से परिभाषित है : $T(1,0,0) = (1,2)$; $T(0,1,0) = (1,-1)$ एवं $T(0,0,1) = (1,1)$, तब किसी स्वेच्छा सदिश $\alpha = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ के लिए $T(\alpha)$ ज्ञात कीजिए। रूपान्तरण T का परिसर तथा शून्य समष्टि और उसकी कोटि एवं शून्यता भी ज्ञात कीजिए।

If a linear transformation $T : R^3 \rightarrow R^2$ is defined as $T(1,0,0) = (1,2)$; $T(0,1,0) = (1,-1)$, $T(0,0,1) = (1,1)$, and then for an arbitrary vector $\alpha = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$, Find $T(\alpha)$. Find also the range and null space of T and also its rank and nullity.

भाग-स 1. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित ग्रुप, किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारिक होता है।

Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.

2. सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G से समूह G^1 पर परिभाषित किसी समाकारिता f की अष्टि, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है। Prove that the Kernel of a homomorphism f of a group G to group G^1 is a normal subgroup of G.

3. सिद्ध कीजिए क्षेत्र F के अरिक्त उपसमुच्चय K का उपक्षेत्र होने के लिए आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध यह है। Show that the necessary and sufficient conditions for a nonvoid subset K of a field F to be a subfield are

$a \in K, b \in K \Rightarrow a - b \in K$

$a \in K, 0 \neq b \in K \Rightarrow ab^{-1} \in K$

4. एक सदिश समष्टि V (F) का अपनी दो उपसमष्टियों U (F) और W (F) का अनुलोम योगफल होने के आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध निम्न है। सिद्ध कीजिए।

The necessary and sufficient conditions for a vector space V (F) to be the direct sum of two of its subspaces U (F) and W (F) are

(i) $V = U + W$ (ii) $U \cap W = \{0\}$

5. यदि U तथा V एक ही क्षेत्र F पर दो सदिश समाष्टियाँ है तथा $f : U \rightarrow V$ एक रैखिक रूपान्तरण है, तथा U परिमित विमीय है, तब कोटि (f)+ शून्यता (f) = विमा U या $\rho(f) + \gamma(f) = n(u)$ जहाँ, विमा $\cup = n(\cup)$.

If f is a linear transformation from a finite dimensional vector space U (F) to an arbitrary vector space V (F), over the same field F, then rank (f) + nullity (f) = dim $\cup$ or $\rho(f) + \gamma(f) = n(u)$ ....where dim $\cup = n(\cup)$.