B. Sc./B.A. (Final) MATHEMATICS, 2018

T. 3 H. **Abstract Algebra** **Ist Paper** **M. M. 75**

भाग-अ 1. यदि $1, \omega, \omega^2$ इकाई के घनमूल है तो प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए।

If $1, \omega, \omega^2$ are cube root of unity. Find order of each element.

2. समूह (z, t) के जनक ज्ञात कीजिए। Find the generators of the group (z, t).

3. यदि If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ तो A^2 ज्ञात कीजिए। then find A^2.

4. कैले-प्रमेय का प्रकथन लिखिए। State Cayley's theorem.

5. विषम क्षेत्र को परिभाषित कीजिए। Define Skew-field.

6. मुख्य गुणजावली प्रान्त की परिभाषा दीजिए। Define Principal Ideal domain.

7. अभाज्य क्षेत्र को परिभाषित कीजिए। Define Prime field.

8. रैखिक योग को परिभाषित कीजिए। Define Linear sum.

9. प्रदर्शित कीजिए कि R^3 के सदिश (1,2,0), (0,3,1) तथा (-1,0,1) एकघाततः स्वतन्त्र है।

Prove that the vectors (1,2,0), (0,3,1) and (-1,0,1) of R^3 are L.I.

10. खण्ड समष्टि की विमा को परिभाषित कीजिए।

Define dimension of a quotient space.

भाग (ब) इकाई – I. 1.(अ) यदि किसी ग्रुप G में तीन क्रमागत पूर्णांकों n के लिए $(ab)^n = a^n b^n \ \forall$ $a, b \in G$ तो सिद्ध कीजिए कि G एक आवेली ग्रुप है।

If G is a group such that $(ab)^n = a^n b^n$ for three consecutive integers n for all a,b in g, show that G is abelian. **अथवा / OR**

(ब) यदि If $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ तथा and $q = (2,3,4)$

तो सिद्ध कीजिए then prove that : $pqp^{-1} = [p(2)p(3)p(4)]$

इकाई – II. 2. (अ) सिद्ध कीजिए किसी ग्रुप G में निम्न प्रकार से परिभाषित सर्वांगसमता सम्बन्ध $a \equiv b \pmod H \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$ एक तुल्यता सम्बन्ध है जहाँ H, G का उपग्रुप है।

Show that the relation of congruency in a group G defined by $a \equiv b \pmod H$ iff $ab^{-1} \in H$ is an equivalence relation, where H is a subgroup of G. **अथवा / OR**

(ब) यदि समूह G का एक उपसमूह H है और $(G:H) = 2$ है तो सिद्ध कीजिए कि $aH = Ha, \forall a \in G$.

If H is a subgroup of G and $(G:H) = 2$, prove that $aH = Ha, \forall a \in G$.

इकाई-III. 3.(अ) यदि $s = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$ तब सिद्ध करो कि S वलय $(R, +, \bullet)$ का उपवलय है। जहाँ R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। If $s = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$, then prove that S is a subring of $(R, +, \bullet)$, where R is set of real numbers. **अथवा / OR**

(ब) सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण या तो शून्य है या अखण्डनीय संख्या है।

Prove that the characteristics of an integral domain is either zero or a prime number.

इकाई –IV. 4. (अ) वलय $[\{0,1,2,3,4,5\}, +_6, \bullet_6)$ की सभी मुख्य गुणनावली ज्ञात कीजिए।

Find all the principal ideals of the ring. $[\{0,1,2,3,4,5\}, +_6, \bullet_6)$ **अथवा / OR**

(ब) किसी सदिश समष्टि V (F) का अरिक्त उपसमुच्चय w, v की उपसमष्टि हो इसके लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि-

35

The Necessary and sufficient conditions for a non empty subset w of a vector space V (F) to be a subspace of V are.

(i) $w_1 \in w, w_2 \in w \Rightarrow w_1 - w_2 \in w$ (ii) $\alpha \in F, w \in w \Rightarrow \alpha \cdot w \in w$

इकाई–V. 5.(अ) यदि w किसी सदिश समष्टि V(F) की एक उपसमष्टि है तो सिद्ध कीजिए कि विभाग समष्टि V/w, V का एक समाकारी प्रतिबिम्ब है, जिसकी अष्टि w है।

If w is a subspace of n vectors, space V(F), then prove that the quotient space V/w, is a homomorphic image of V with kernel w. **अथवा / OR**

(ब) यदि V बहुपदों (जिनकी कोटि ≤ 2 है) का सदिश समष्टि है अर्थात् $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in R\}$ बहुपद $p_1(x) = 1, p_2(x) = x - 1, P_3(x) = x^2 - 2x + 1$, समष्टि V का आधार है माना $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$ तब p (x) के आधार (P_1, P_2, P_3) के सामेक्ष निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

Let V be the vector space of Polynomials with degree ≤ 2 i.e $V = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in R\}$ But Polynomials $p_1(x) = 1, p_2(x) = x - 1, P_3(x) = x^2 - 2x + 1$ form a basis for V_{let} $p(x) = 2x^2 - 5x + 6$ .Find the Cordinates vector of p(x) relative to the basis (P_1, P_2, P_3).

भाग–स 1. यदि किसी ग्रुप के एक अवयव a की कोटि n हो तो दर्शाइए कि $a^m = e$ होगा यदि और केवल यदि m, n का गुणज है। If order of an element a of a group is n, then show that $a^m = e$ iff m is a multiple of n.

2.यदि (G,*) एक समूह है और $H = \{x \in G : x * g = g * x \forall g \in G\}$ सिद्ध कीजिए कि H समूह G का उपसमूह है। If (G, *) be a group and $H = \{x \in G : x * g = g * x \forall g \in G\}$ Show that H is a subgroup of G.

3. यदि $a \oplus b = a + b + 1$ तथा $a \odot b = a + b + ab$ है जिसमें $a, b \in R$ वास्तविक संख्याएँ है तो सिद्ध कीजिए $(R, \oplus, \odot)$ एक क्षेत्र है। If $a \oplus b = a + b + 1$ and $a \odot b = a + b + ab$ for any real numbers $a, b \in R$ then show that $(R, \oplus, \odot)$ is a field.

4. सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V की दो उपसमष्टियों w_1 तथा w_2 का संघ एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $w_1 \subset w_2$ या $w_2 \subset w_1$

Prove that the union of two subspaces w_1 and w_2 of a vector space V is a subspace iff either $w_1 \subset w_2$ or $w_2 \subset w_1$

5.यदि S एवं T किसी सदिश समष्टि V की परिमित विमीय उपसमष्टियाँ हों, तो सिद्ध करो कि- विमा S + विमा T = विमा (S+T) + विमा $(S \cap T)$.

If S and T are finite-dimensional subspace of a vector space, then prove that dim S + dim T = dim (S+T)dim$(S \cap T)$

T. 3 H. Analysis & Laplace Transforms IIndPaper M. M. 75

भाग–अ 1.(a) उपरि परिबंध तथा निम्न परिबन्ध को परिभाषित कीजिए।

Define upper Bound and Lower Bound.

(b) व्युत्पन्न समुच्चय तथा सघन समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Define Derived set and Dense set.

(c) रीमान समाकलन को परिभाषित कीजिए। Define Riemann Integral.

(d) उपरि तथा निम्न डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

Define upper and lower Darbouse sums.