

B. Sc./B.A. (Final) MATHEMATICS, 2016

T. 3 H.

Abstract Algebra Ist Paper

M. M. 75

भाग-अ 1. मोनोएड को परिभाषित कीजिए व उदाहरण दीजिए ।

Define Monoid and give an example.

2. ग्रुप $[(1, -1, i, -i), x]$ के प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए ।

Find the order of each element of the group $[(1, -1, i, -i), x]$.

3. किसी समूह के प्रसामान्यक को परिभाषित कीजिए । Define Normaliser of group.

4. सिद्ध कीजिए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक उप-समूह विशिष्ट होता है ।

Prove that every subgroup of an abelian group is normal.

5. वलय समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए ।

Define kernel of Ring homomorphism.

6. वलय $[Z_4, +4 \cdot 4]$ का अभिलक्षण ज्ञात कीजिए ।

Find the characteristic of a ring $[Z_4, +4 \cdot 4]$.

7. विभाग विलय को परिभाषित कीजिए । Define Quotient ring.

8. प्रदर्शित कीजिए कि निम्न सदिश, सदिश समष्टि $V_3(R)$ को विस्तृत करते हैं ।

Show that the following vectors generate or span the vector space $V_3(R)$.

$$u_1 = (1, 2, 3); u_2 = (0, 1, 2); u_3 = (0, 0, 1)$$

9. खण्ड समष्टि की परिभाषा दीजिए । Define Quotient Space.

10. सिल्वेस्टर शून्यता का नियम लिखिए । Write Sylvester Law of Nullity.

भाग (ब) इकाई - I. 1. (अ) यदि किसी ग्रुप में G में तीन क्रमागत पूर्णाकों n के लिए $(ab)^n = a^n b^n$ $\forall a, b \in G$ तो सिद्ध कीजिए कि G एक आबेली ग्रुप है ।

If G is a group such that $(ab)^n = a^n b^n \forall a, b \in G$ for three consecutive integers n for all a, b in G , show that G is abelian. अथवा / OR

(ब) $\sigma^{-1} P \sigma$ ज्ञात कीजिए जबकि- Find $\sigma^{-1} P \sigma$

यदि When $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ तथा and $\sigma = (134)(56)(2789)$.

क्रमचय P को असंयुक्त चक्रों के गुणनफल में व्यक्त करके बताइए कि P सम क्रमचय है अथवा विषम ? Also express that permutations P as a product of disjoint cycles. Find whether P is an even or odd permutation.

इकाई - II. 2. (अ) एक परिमित ग्रुप के प्रत्येक उपग्रुप का गुपांक, उस ग्रुप के गुपांक का भाजक होता है । The order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group. अथवा / OR

(ब) यदि f ग्रुप G से G' पर एक समाकारिता हो तो f की अष्टि K ग्रुप G का उपग्रुप होता है ।

If f is a homomorphism of a group G to a group G' with kernel K , then K is a subgroup of G .

इकाई-III. 3. (अ) माना कि R एक वलय है । सिद्ध कीजिए कि $C = \{x \in R \mid xy = yx \forall y \in R\}$ वलय R का उपवलय है । Let R be a Ring. Show that $C = \{x \in R \mid xy = yx \forall y \in R\}$, is a subring of R . अथवा / OR

(ब) यदि $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$ तो सिद्ध कीजिए कि R एक पूर्णाकीय प्रान्त है इसका विभाग क्षेत्र ज्ञात कीजिए । If $R = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Z\}$ then show that R is an integral

2 / B. A. / B. Sc. (Final) MATHEMATICS, 2016

domain. Obtain its field of quotients.

इकाई -IV. 4: (अ) किसी वलय R की प्रत्येक समाकारिक प्रतिबिम्ब उसके किसी विभाग वलय के तुल्यकारी होती है बताइए । Prove every homomorphic image of a ring R is isomorphic to some quotient Ring there of. अथवा / OR

(ब) सिद्ध कीजिए कि समुच्चय Show that the set :

$$W = \{(x, y, z) \mid x - 3y + 4z = 0; x, y, z \in R\}$$

3-तुपलों के सदिश समष्टि $V_3(R)$ की एक उपसमष्टि है ।

of 3-Tuples is a subspace of the vector space $V_3(R)$.

इकाई-V. 5.(अ) सिद्ध कीजिए कि $V_3(R)$ का $V_2(R)$ पर प्रतिचित्रण f , जो कि $f[(u_1, u_2, u_3)] = (u_1 - u_2, u_1 - u_3)$ द्वारा परिभाषित है एक रैखिक रूपान्तरण होगा ।

Prove that the mapping $f : V_3(R) \rightarrow V_2(R)$ defined by $f[(u_1, u_2, u_3)] = (u_1 - u_2, u_1 - u_3)$ is a linear transformation. अथवा / OR

(ब) सिद्ध करो कि यदि f सदिश समष्टि $U(f)$ से $V(f)$ में एक रैखिक रूपान्तरण है तो f का परास $V(f)$ की एक उपसमष्टि होती है । Prove that if f is a linear transformation from a vector space $U(f)$ to $V(f)$ then the range of f is a subspace of $V(f)$.

भाग-स 1. सिद्ध कीजिए कि n कोटि के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय A_n एक समूह है जिसका समूहांक $\frac{n!}{2}$ है । Prove that the set A_n of all even permutations of degree n is group of order $(n)!/2$.

2. सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का प्रत्येक समाकृतिक प्रतिबिम्ब किसी अवशेष वर्ग समूह के तुल्यकारी होता है । Prove that every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G .

3. सिद्ध कीजिए कि गाउन्सीय पूर्णाकों का समुच्चय $J = \{a + ib : a, b \in Z\}$ समिश्र संख्याओं के योग व गुणन के लिए एक वलय है । क्या यह एक क्षेत्र है ? Show that the set J of Gaussian Integers $J = \{a + ib : a, b \in Z\}$ form a ring with respect to Ordinary addition and multiplication of complex numbers. Is it a field ?

4. सिद्ध कीजिए कि एक तत्समकी क्रमविनिमेय वलय R की कोई गुणनावली I एक उचिष्ठ गुणनावली है यदि और केवल यदि विभाग वलय R/I एक क्षेत्र है । Prove that an ideal I of a commutative Ring R with unity is maximar if the quotient ring R/I is a field.

5. यदि S एवं T किसी सदिश V की परिमित विमीय उपसमष्टियाँ हो, तो सिद्ध करो कि-विभा $S +$ विभा $T =$ विभा $(S + T)$, विभा $(S \cap T)$. If S and T are finite dimensional subspace of a vector space V then show that $\dim S + \dim T = \dim (S + T) + \dim (S \cap T)$.