

Analysis and Laplace Transforms  
Second Paper

T. 3 H.

M. M. 75

इकाई I.

1. (अ) अपरिमेय संख्या  $\sqrt{3}$  के संगत डेडेकिंड कट को ज्ञात कीजिए ।  
Find Dedekind cut corresponding to irrational number  $\sqrt{3}$ .  
(ब) संवृत अन्तराल  $[a, b]$  संवृत समुच्चय होता है ।  
Closed interval  $[a, b]$  is a closed set.

अथवा / OR

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि अनन्त परिबद्ध समुच्चय का व्युत्पन्न समुच्चय परिबद्ध होगा ।  
Prove that the derived set of an infinite bounded set is bounded.  
(ब) किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं ।

Between two different real numbers there lie an infinite number of rational numbers.

इकाई II.

3. (अ) यदि  $f(x) = x^3, x \in [0, 1]$  और अन्तराल  $[0, 1]$  का कोई विभाजन  $P = \{0, \bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n\}$  है तो  $U(f, P)$  तथा  $L(f, P)$  ज्ञात कीजिए तथा समाकल

1.  $\int_0^1 x^3 dx$  का मान ज्ञात कीजिए।

If  $f(x)=x^3$ ,  $x \in [0,1]$  and partition of the interval  $[0,1]$  be such that

$$P = \left\{ 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}$$

then  $U(f, P)$  and  $L(f, P)$  and evaluate the following integral  $\int_0^1 x^3 dx$ .

(ब) यदि फलन  $f$ ,  $[a, b]$  में संतत है, तो सिद्ध कीजिए कि यह संवृत अन्तराल  $[a, b]$  पर R-समाकलनीय होगा। If  $f$  be a continuous function defined on  $[a, b]$ , then prove that  $f$  is R-integrable over  $[a, b]$ . अथवा / OR

4. (अ) यदि फलन  $f$ , अन्तराल  $[a, b]$  पर परिभाषित एवं परिबद्ध वास्तविक फलन है तथा  $[a, b]$  के विभाजन  $P$  का शोधन विभाजन  $P'$  है तो सिद्ध कीजिए कि :

If  $f$  be a real valued bounded function defined on  $[a, b]$  and  $P$  be partition of  $[a, b]$  and  $P'$  is refinement of  $P$ , then prove that :

$$L(f, P) \leq L(f, P') \leq U(f, P') \leq U(f, P).$$

(ब) यदि अन्तराल  $[-1, 1]$  में फलन  $f(x) = e^x$  तथा  $g(x) = x$ , तो बोनेट मध्यमान प्रमेय का सत्यापन कीजिए। If  $f(x) = e^x$  and  $g(x) = x$ , then verify Bonnet's mean value theorem in  $[-1, 1]$ .

इकाई III. 5. (अ) प्रदर्शित करिए कि फलन  $f(z) = xy + iy$  सर्वत्र संतत है परन्तु विश्लेषिक नहीं है। Show that the function  $f(z) = xy + iy$  is everywhere continuous but in not analytic.

(ब) यदि  $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$  तथा  $f(z) = u + iv$ ,  $z = x + iy$  का विश्लेषिक फलन है तो  $f(z)$  का मान  $z$  के पदों में ज्ञात कीजिए।

If  $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$  and  $f(z) = u + iv$  is an analytic function of  $z = x + iy$  then find  $f(z)$  in terms of  $z$ . अथवा / OR

6. (अ) सिद्ध कीजिए कि  $f(z) = \bar{z}$  किसी भी बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

Prove that  $f(z) = \bar{z}$  is not differentiable at any point.

(ब) सिद्ध कीजिए कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत्त के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करता है। Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence.

इकाई IV. 7. (अ) यदि  $C$  एक वर्ग है जिसके शीर्ष  $1 \pm i, -1 \pm i$  है तो फलन  $3z^2 + iz - 4$  के लिए कोशी प्रमेय का सत्यापन करिये। If  $C$  is a square with vertices  $1 \pm i, -1 \pm i$  then verify the Cauchy's theorem for the function  $3z^2 + iz - 4$ .

(ब) यदि संवृत कंटूर  $C$  के अन्दर तथा ऊपर  $f(z)$  एक विश्लेषिक फलन है तथा  $C$  के अन्दर  $z_0$  कोई बिन्दु हो, तो सिद्ध कीजिए कि

If  $f(z)$  is analytic within and on a closed contour  $C$  and  $z_0$  is any point within  $C$ , then

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z) dz}{z - z_0}$$

अथवा / OR

8. (अ) कोशी समाकल सूत्र से सिद्ध करो कि:

Using Cauchy's integral formula, prove that :

$$\int_{|z|=2} \frac{9z^2 - iz + 4}{z(z^2 + 1)} dz = 18\pi i.$$

4 / B. A. / B. Sc. (Final) MATHEMATICS, 2013

(ब) यदि एक शः सम्बद्ध प्रदेश  $G$  में  $f(z)$  विश्लेषिक फलन हो, तो सिद्ध कीजिए कि अनिश्चित समाकल  $\int_{z_0}^z f(z) dz$ ,  $G$  में बिन्दुओं  $z_0$  एवं  $z$  को मिलाने वाले पथ से स्वतन्त्र होता है

If  $f(z)$  is analytic in a simply connected domain  $G$ , then prove

that the indefinite integral  $\int_{z_0}^z f(z) dz$ ,  $G$  is independent of the path joining  $z_0$  with  $Z$  in  $G$ .

इकाई V. 9. (अ) सिद्ध कीजिए : Prove that :

$$L = \left\{ \frac{\sin^2 x}{x} dx \right\} = \frac{1}{4} \log_e \left( \frac{s^2 + 4}{s^2} \right)$$

लाप्लास रूपान्तरण का प्रयोग कर निम्न को हल कीजिए :

By using Laplace transform solve the following :

$(D^2 + 2D + 1)y = t$ , where  $\frac{d}{dt} = D$ ,  $y(0) = -3$ ,  $y(1) = -1$ .

अथवा / OR

10. (अ) मान ज्ञात कीजिए : Evaluate :

$$L^{-1} = \left\{ \frac{4p + 5}{(p-1)^2(p+2)} \right\}$$

10. (ब) संवलन प्रमेय की सहायता से हल कीजिए :

Solve by using convolution theorem :

$$L^{-1} = \left\{ \frac{p}{(p^2 + a^2)^2} \right\}$$