of same number of elements.

Analysis and Laplace Transforms

T. 3 H. **Second Paper** **M. M. 75**

इकाई I. 1. (अ) डेडेकिंड के प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।
State and prove the Dedekind theorem.

(ब) सिद्ध कीजिए किन्हीं दो भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती है। Prove that between two different real numbers there lie an infinite number of ration number.

अथवा / OR

2. (अ) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है। Prove that every infinite bounded set has at least one limit point.

(ब) सिद्ध कीजिए विवृत्त समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत्त समुच्चय होता है। Prove that the intersection of a finite collection of an open set is an open set.

इकाई II. 3. (अ) यदि फलन f अन्तराल $[a,b]$ पर परिभाषित एवं परिबद्ध वास्तविक फलन हो तो तथा m, M फलन f के $[a,b]$ में क्रमशः निम्नक एवं उच्चक हो तो सिद्ध कीजिए कि : Let f be a real valued bounded function defined on $[a,b]$ and m and M be infimum and supremum of f in $[a,b]$, then prove that :

$m(b-a) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq M(b-a), \forall P \in P[a,b]$.

(ब) यदि f अन्तराल $[0, a]$ में परिभाषित $f(x) = x^2$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $f \in R$

$[0, a]$ तथा, $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}$ जहाँ $a > 0$ और $x \in [0, a]$.

If f is defined on $[0, a], a > 0$ by $f(x) = x^2, x \in [0, a]$ then show that $f \in R$ $[0, a]$ and $\int_0^a f(x)dx = \frac{a^3}{3}$.

अथवा / OR

4. (अ) यदि $f \in R[a, b]$ तथा फलन f का पूर्व ϕ अन्तराल $[a, b]$ पर विद्यमान है तो सिद्ध कीजिए : If $f \in R[a, b]$ and if there exist a primitive function ϕ on interval $[a, b]$ then prove that :

$$\int_a^b f(x)(dx) = \phi(b) - \phi(a).$$

(ब) माना कि $f \in R[a, b]$ और फलन f के अन्तराल $[a, b]$ में परिबद्ध M तथा m हो तो m और M के मध्यमान एक संख्या μ इस प्रकार विद्यमान होगी कि : Let $f \in R[a, b]$ and if M and m be bounds of f in $[a, b]$. Then there exist a number μ between m and M such that :

$$\int_a^b f(x)(dx) = \mu(b-a).$$

सिद्ध कीजिए : Prove it.

इकाई III. 5. (अ) प्रदर्शित कीजिए कि फलन Prove that the function defined

by : $f(z) = \frac{x^2y^5(x+iy)}{x^4+y^{10}}, \; z \neq 0,$

तथा $f(0) = 0$ मूल बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है। जबकि इस बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट है। and $f(0) = 0$ is not analytic at the origin though Cauchy-Riemann equations are satisfied at the point.

(ब) सिद्ध कीजिए कि फलन $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ के किसी प्रान्त D में विश्लेषिक होने के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध है कि उस प्रान्त में u तथा v कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट करते हैं, अर्थात् Prove that the necessary condition that a function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ be analytic in a domain D is that in D, u and v satisfy the Cauchy-Riemann equations i.e.,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \; \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}.$$

अथवा / OR

6. (अ) माना $|f(z)|$ एक प्रदेश में अचर है जहाँ f(z) विश्लेषिक फलन है तो सिद्ध कीजिए f(z) अचर है। Let $|f(z)|$ be a constant in a region where f(z) is analytic then prove that f(z) is a constant.

(ब) निम्न घात श्रेणियों के अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए :

Find the radii of convergence of the power series :

(i) $\sum \frac{(-1)^n}{n}(z-2i)^n$

(ii) $\sum \frac{n\sqrt{2}+i}{1+2in} z^n$

इकाई IV. 7. (अ) माना कि एकशः संबद्ध प्रदेश G में f(z) विश्लेषिक फलन है। यदि G में C कोई संवृत्त कंटुर हो तो सिद्ध कीजिए : Let f(z) is analytic in a simply connected domain G. If C is a closed contour lying in G then prove that :

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

(ब) माना कि एकशः सम्बद्ध प्रदेश G में f(z) संतत है। यदि G में प्रत्येक सरल संवृत्त कंटुर C

के अनुदिश $\int_C f(z)\,dz = 0$ हो तो सिद्ध कीजिए कि G में f(z) विश्लेषिक फलन होगा।

Let f(z) be a continuous function in a simply connected domain G, if $\int_C f(z)\,dz = 0$ along every simple closed contour C. Then prove that f(z) is analytic in G.

अथवा / OR

8. (अ) यदि z के प्रत्येक परिमित मान के लिए f(z) एक विश्लेषिक फलन हो तथा परिबद्ध हो तो सिद्ध कीजिए कि यह अचर होगा। If a function f(z) is analytic for all finite values of z and is bounded then prove that it is a constant.

(ब) मान ज्ञात कीजिए : Find the value of :

$$\int_{|z|=1} \frac{\sin^6 z}{\left[z-\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]^3}\,dz.$$

(अ) मान ज्ञात कीजिए L [F(t), जहाँ Find L [F(t)], where

$$F(t)=\begin{cases}\cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right), & t>\frac{2\pi}{3}\\ 0, & t<\frac{2\pi}{3}.\end{cases}$$

(ब) संवलन प्रमेय की सहायता से हल कीजिए Solve by using convolution theorem: $L^{-1}\left\{\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right\}$

अथवा / OR

10. (अ) मान ज्ञात कीजिए : Evaluate :

$$L^{-1}=\left[\frac{(s+1)\,e^{-\pi s}}{s^2+s+1}\right]$$

(ब) लाप्लास रूपान्तरण की सहायता से हल कीजिए : Solve by Laplace transform :

$(D^2+9)y=\cos 2t$ दिया हुआ है : Given that : $y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$

(Rigid Bodies and Hydrostatics)