

01 a vector space v metric space  
T.3 H. Analysis & Laplace Transforms IInd Paper M. M. 75

भाग-अ 1.(a) बॉलजनों वाइस्ट्रास प्रमेय का कथन लिखिए।

State Bolzano Weierstrass theorem.

(b) डेडिकिण्ड कट की परिभाषा दीजिए। Define Dedekind Cut.

(c) विभाजन का सूक्ष्मकरण या अधिशोधन या शोधन का क्या तात्पर्य है ?

What is meaning of the refinement of a Partition ?

(d) डार्बू योग को परिभाषित कीजिए। Define Darboux sum.

(e) विश्लेषिक फलन की परिभाषा दीजिए। एक उदाहरण दीजिए।

Define analytic function. Give an example.

# B. Sc. / B. A. (Final) MATHEMATICS, 2016 / 3

(f) घात श्रेणी को परिभाषित कीजिए। Define Power series.

(g) एकशः सम्बद्ध तथा बहुसम्बन्धित प्रदेश को परिभाषित कीजिए।

Define simply and Multi connected region.

(h) मोरेरा प्रमेय का कथन कीजिए। State Morera theorem.

(i) लाप्लास रूपान्तरण की परिभाषा लिखिए। Define Laplace Transform.

(j) मान ज्ञात कीजिए। (Evaluate)  $L\{t^4\}$

**भाग (ब)** इकाई - I. 1.(अ) सिद्ध कीजिए कि विवृत्त समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत्त समुच्चय होता है। Prove that the intersection of finite Collection of Open sets is an Open set.

(ब) यदि क्रमित क्षेत्र  $F$  के किसी अरिक्त परिबद्ध उपसमुच्चय  $S$  के निम्नक और उच्चक  $F$  में विद्यमान हों, तो वह अद्वितीय होते हैं। The supremum and infimum of a nonvoid subset  $S$  of an Ordered field  $F$ , if exist then are always unique.

**इकाई - II.** 3.(अ) यदि  $f \in R[a, b]$  तथा फलन  $f$  का पूर्वग  $\phi$  अन्तराल  $[a, b]$  पर विद्यमान है तो सिद्ध कीजिए : If  $f \in R[a, b]$  and if there exists a Primitive function  $\phi$  on interval  $[a, b]$  then prove that :

$$\int_a^b f(x) (dx) = \phi(b) - \phi(a).$$

**अथवा / OR**

(ब) फलनों  $f(x) = x$ ,  $g(x) = e^x$  के लिए अन्तराल  $[-1, 1]$  में द्वितीय माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए। For the function  $f(x) = x$ ,  $g(x) = e^x$  then verify the second mean value theorem in the interval  $[-1, 1]$ .

**इकाई - III.** 4.(अ) प्रदर्शित कीजिए कि फलन  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  मूल बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरणों को सन्तुष्ट करता है, परन्तु इस बिन्दु पर विश्लेषिक फलन नहीं है।

Show that the function  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  satisfies the Cauchy-Riemann equations at the Origin but is not analytic at the Point.

**अथवा / OR**

(ब) यदि  $f(z) = u + iv$ ,  $z = x + iy$  का एक विश्लेषिक फलन है और  $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ ,  $f(z)$  को  $Z$  के पर्दों में ज्ञात कीजिए। If  $f(z) = u + iv$ , is an analytic function of  $z = x + iy$  and  $u - v = e^x(\cos y - \sin y)$ , find  $f(z)$  in terms of  $(z)$ .

**इकाई - IV.** 5.(अ) कोशी समाकल सूत्र का कथन व सिद्ध कीजिए।

State and prove Cauchy's integral formula.

**अथवा / OR**

(ब) यदि  $C$  एक वृत्त  $|z - 1| = 2$  हो तो फलन  $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$  के लिए कोशी समाकल प्रमेय का सत्यापन कीजिए। If  $C$  is the circle  $|z - 1| = 2$  then Verify the Cauchy's integral theorem for the function  $z^3 - iz^2 - 5z + 2i$ .

**इकाई - V.** 6.(अ) सिद्ध कीजिए कि- Prove that :  $L^{-1}\left\{\frac{1}{(y^2 + a^2)^2}\right\} = \frac{1}{2a^3} (\sin at - at \cos at)$

**अथवा / OR**

(ब) लाप्लास रूपान्तरण द्वारा हल कीजिए : Solve by Laplace transform.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + 5y = e^{-x} \sin x$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

**भाग-स 7.** सिद्ध कीजिए कि संवृत्त अन्तराल  $(a, b)$  संवृत्त समुच्चय होता है।

Prove that closed interval  $(a, b)$  is closed set.

#### 4 / B.A. / B.Sc. (Final) MATHEMATICS, 2016

डार्बू प्रमेय का कथन व सिद्ध कीजिए। State and Prove Darboux theorem.

8. सिद्ध कीजिए कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत के अन्दर प्रत्येक बिन्दु पर विश्लेषिक फलन निरूपित करता है। Prove that a Power series represents an analytic function inside its circle of Convergence.

9. यदि डिस्क  $c : |z| \leq R$  के अन्तर्विष्ट करने वाले क्षेत्र में  $f(z)$  विश्लेषिक फलन है तो  $z = re^{i\theta}$ ,  $r < R$  के लिए If  $f(z)$  is analytic in a region containing the disk  $c : |z| \leq R$ . Then for  $z = re^{i\theta}$ ,  $r < R$  we have  $2\pi$

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2) f(Re^{i\theta})}{(R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2)} d\phi$$

11. लॉप्लास रूपान्तरण द्वारा मान ज्ञात कीजिए। Evaluate by Laplace transform.

$$\int_0^\infty \begin{pmatrix} -t & -3t \\ e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix} dt$$

(Ans.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ) (Applications of Laplace Transforms and Hydrostatics)