T. 3 H. **Analysis & Laplace Transforms IInd Paper M.M. 75**

भाग–अ 1.(a) उपरि परिबंध तथा निम्न परिबन्ध को परिभाषित कीजिए।

Define upper Bound and Lower Bound.

(b) व्युत्पन्न समुच्चय तथा सघन समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Define Derived set and Dense set.

(c) रीमान समाकलन को परिभाषित कीजिए। Define Riemann Integral.

(d) उपरि तथा निम्न डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

Define upper and lower Darbouse sums.

(e) विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए। Define Analytic Function.

(f) घात श्रेणी को परिभाषित कीजिए। Define power series.

(g) मोरेरा प्रमेय का कथन कीजिए। State Morera's theorem.

(h) ल्यूवेल प्रमेय का कथन कीजिए। State Liouville's theorem.

(i) लाप्लास तथा व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तरण को परिभाषित कीजिए।
Define Laplace and inverse laplace transform.

(j) कन्वोल्यूशन प्रमेय का कथन कीजिए। State convolution theorem.

भाग (ब) इकाई – I. 1.(अ) प्रत्येक असीमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है। सिद्ध कीजिए।

Prove that every infinite bounded set has at least one limit point. **अथवा / OR**

(ब) सिद्ध कीजिए कि विवृत समुच्चयों का प्रत्येक परिमित सर्वनिष्ठ निर्धारण एक विवृत समुच्चय होता है।

Prove that the intersection of a finite collection of open sets is an open set.

इकाई – II. 2.(अ) फलन f अन्तराल $[a,b]$ पर परिभाषित परिबद्ध फलन है। तो प्रत्येक $\in >0$ के लिए एक ऐसा $\delta > 0$ उपलब्ध विद्यमान होगा कि प्रत्येक विभाजन $P \in P[a,b], ||P|| \leq \delta$ के लिए सिद्ध कीजिए कि : Let f be defined and bounded on $[a,b]$ Then for every $\in > 0$, then exists $\delta > 0$, such that for all partitions $P \in P[a,b]$, for which $||P|| \leq \delta$ then prove that :

(i) $\cup(f,P) < \int_a^b f(x)dx + \in$

(ii) $L(f,P) > \int_a^b f(x)dx - \in, \forall P \in P[a,b]$ **अथवा / OR**

(ब) यदि f अन्तराल $[0,1]$ के लिए निम्न तरह से परिभाषित हो

Let f be a function on $[0,1]$ defined by

$$f(x) = \begin{cases} 1 & if \quad x \neq 1/2 \\ 0 & if \quad x = 1/2 \end{cases}$$

तो सिद्ध कीजिए कि then show that $f \in R[0,1]$ तथा and evaluate that $\int_0^1 f(x)dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

इकाई – III. 3.(अ) प्रदर्शित कीजिए कि फलन f जो कि $f(z) = e^{-z^{-4}}, z \neq 0; f(0) = 0$ द्वारा परिभाषित है वह $Z = 0$ पर वैश्लेषित नहीं है। जबकि कोशी-रीमान समीकरण इस बिन्दु पर सन्तुष्ट है। Show that the function f defined by $f(z) = e^{-z^{-4}}, z \neq 0; f(0) = 0$ is not analytic at $Z = 0$, although cauchy-Reimann equations are satisfied at that point. **अथवा / OR**

(ब) कोशी-रीमान समीकरणों का ध्रुवीरूप को सिद्ध कीजिए।

Polar form of cauchy-Reimann equations.

$$\frac{\partial \mu}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \theta} = \frac{-r\partial V}{\partial r}$$ सिद्ध कीजिए। Prove it.

इकाई – IV. 4.(अ) फलन 5sin2z के लिए कोशी समाकलन प्रमेय का सत्यापन कीजिए यदि C एक वर्ग है। जिसके शीर्ष $1 \pm i$ तथा $-1 \pm i$ है। Verify Cauchy's theorem for the funtion 5sin2z if C is the square with vertices $1 \pm i$ and $-1 \pm i$. **अथवा / OR**

(ब) मान ज्ञात कीजिए। Evaluate :

$$\int_{[z]=3} \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz$$

37

4 / B. A. / B. Sc. (Final) MATHEMATICS, 2018

इकाई–V. 5. (अ) मान ज्ञात कीजिए : Evaluate

(i) $\ell[t^2 \cos at]$ (ii) $\ell[te^{-t} \cosh t]$

अथवा / OR

(ब) मान ज्ञात कीजिए Evaluate :

(i) $\ell^{-1}\left[\frac{p}{(p+1)^{5/2}}\right]$ (ii) $\ell^{-1}\left[\frac{6p-4}{p^2-4p+20}\right]$

भाग–स 1. डेडेकिंड के प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

State and prove the Dedekind's theorem.

2. यदि $f \in R[a,b]$ तो प्रदर्शित कीजिए कि $|f| \in R[a,b]$ यह भी सिद्ध कीजिए कि इसका विलोम का सत्य होना आवश्यक नहीं है।

If $f \in R[a,b]$ then show that $|f| \in R[a,b]$. Also prove that its converse is not necessarily true.

3. यदि If $4+v = \frac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$ तथा and $f(z) = 4+iv$ एक विश्लेषिक फलन हो तो $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए is an analytic function then find $f(z)$ in terms of z.

4. यदि संवृत कंटूर C के अन्दर तथा ऊपर $f(z)$ एक विश्लेषिक फलन है तथा C के अन्दर Z_0 कोई बिन्दु हो तो सिद्ध कीजिए कि- If $f(z)$ is analytic within and on a closed contour C and Z_0 is any point within C then prove that :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)dz}{z-z_0}$$

5. लॉप्लास रूपान्तरण की सहायता से हल कीजिए। Solve by Laplace transform.

$(D^2+9)y = \cos 2t$ दिया हुआ है। Given that

$$y(0)=1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

जहाँ Where $D = \frac{d}{dt}$

Mechanics-II (Dynamics of Rigid Bodies and Hydrostatics)