

Mechanics - II (Dynamics of Rigid Bodies and Hydrostatics)
T. 3 H. Third Paper M. M. 75

इकाई I. 1. (अ) एक तार त्रिज्या a के अर्ध-वृत्त के रूप में है, प्रदर्शित कीजिए कि इसके व्यास के शीर्ष पर इसके तल में मुख्य अक्ष व्यास से निम्न कोण पर झुके हैं :

A wire is in the form of a semi-circle of radius a ; show that at an end of its diameter the principal axes in its plane are inclined to the diameter at angles :

$$\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4}{\pi} \right), \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{4}{\pi} \right)$$

(ब) एक दृढ़ पिण्ड की गति के व्यापक समीकरण लिखिये तथा इसके जड़त्वीय केन्द्र की स्थानान्तरण गति के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Write general equations of motion of a rigid body and obtain the equations of motion of translation of its centre of inertia. **अथवा / OR**

2. (अ) $2a$ लम्बाई की एक छड़ OA अपने एक सिरे O पर चिकने कब्जे द्वारा गुजरने वाली उर्ध्वाधर अक्ष OZ के परितः एक समान कोणीय वेग ω से इस प्रकार परिक्रमण करती है कि वह शंकु का निर्माण करे, जिसका अर्द्धशीर्ष कोण α हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि :

A rod OA of length $2a$ revolves with uniform angular velocity ω about a vertical axis OZ through a smooth joint at O so that it describes a cone of semi-vertical angle α , show that :

$$\omega^2 = \frac{3}{4} \frac{g}{a \cos \alpha}$$

(ब) एक दृढ़ पिण्ड का एक स्थिर घूर्णन अक्ष के परितः कोणीय संवेग ज्ञात कीजिए ।

Find the angular momentum of a rigid body rotating about a fixed axis.

इकाई II. 3. (अ) एक h ऊँचाई तथा α अर्द्धशीर्ष कोण वाला टोस एकसमान शंकु अपने आधार के व्यास के परितः दोलन करता है । प्रदर्शित कीजिए कि तुल्य-सरल लोलक की लम्बाई

$$\frac{h}{5}(2+3 \tan^2 \alpha) \text{ है।}$$

A solid homogenous cone of height h and semi-vertical angle α , oscillates about a diameter of its base. Show that the length of the simple equivalent pendulum is $\frac{h}{5}(2+3 \tan^2 \alpha)$.

(ब) परिमित बलों के अधीन दो विमा में गतिशील दृढ़ पिण्ड की गति के समीकरण ज्ञात कीजिए। Find the equations of motion of a rigid body moving in 2-D under finite forces.

अथवा / OR

4. (अ) एक समकोणिक तथा 2α शीर्ष कोण वाला शंकु अपनी अक्ष के लम्बवत् तथा आधार के केन्द्र से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकता है। यदि शंकु अपनी क्षैतिज अक्ष के साथ विरामावस्था से आरम्भ होता है तो प्रदर्शित कीजिए कि जब अक्ष ऊर्ध्वाधर होता है तो स्थिर अक्ष पर प्रणोद तथा शंकु के भार का अनुपात $\left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\right) : \left(1 - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha\right)$ है।

A right cone of angle 2α can turn freely about an axis passing through the centre of its base and perpendicular to the axis; if the cone starts from rest with its axis horizontal, show that, when the axis is vertical, the ratio of the thrust on the fixed axis to the weight of the cone is: $\left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha\right) : \left(1 - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha\right)$

(ब) एक एकसमान छड़ का एक शीर्ष पूर्ण रूक्ष मेज पर टिका है तथा छड़ को ऊर्ध्वाधर स्थिति से विरामावस्था से छोड़ने पर इस शीर्ष के परितः घूमती है। गति की विवेचना कीजिए। One end of a uniform rod rests on a perfectly rough table and when released from rest from the vertical position, it rotates about this end. Discuss the motion.

इकाई III. 5. (अ) सिद्ध कीजिए कि जब कोई तरल गुरुत्वाधीन विरामावस्था में हो, तो उसमें क्षैतिज समतल के सभी बिन्दुओं पर दाब समान होता है। Prove that in a fluid at rest under gravity, the pressure is same at all points in the same horizontal line.

(ब) ऊर्ध्वाधर समतल में स्थित एक पतली वृत्ताकार नली के कुछ भाग में δ घनत्व का एक द्रव भरा हुआ है, जो केन्द्र पर समकोण अंतरित करता है तथा कुछ भाग में δ' घनत्व का द्रव भरा हुआ है, जो केन्द्र पर α कोण अंतरित करता है। यदि उभयनिष्ठ पृष्ठ से जाने वाली त्रिज्या ऊर्ध्वाधर से θ कोण बनाती हो, तो सिद्ध कीजिए कि : A fine circular tube in the vertical plane contains a column of liquid of density δ , which subtends a right angle at the centre, and a column of density δ' subtending angle α . If θ is the angle that radius through the common surface makes with the vertical, prove that:

$$\tan \theta = \frac{\delta - \delta' + \delta' \cos \alpha}{\delta + \delta' \sin \alpha}$$

अथवा / OR

6. (अ) किसी द्रव में डूबे एक ठोस बेलन की अक्ष का दो विभिन्न स्थितियों में ऊर्ध्वाधर के साथ झुकाव एक दूसरे का पूरक है। यदि इन दो स्थितियों में इसके दोनों सिरों पर दाबों का अन्तर P तथा P' हो तो सिद्ध कीजिए कि विस्थापित तरल का भार $\sqrt{P^2 + P'^2}$ के बराबर है। The inclinations of the axis of a submerged solid cylinder to the vertical in two different positions are complementary to each other. If P and P' be the differences between the pressures on the two ends in the two cases, prove that the weight of the displaced fluid is equal to $\sqrt{P^2 + P'^2}$.

(ब) एक a भुजा का वर्ग ऊर्ध्वाधर दो द्रवों में डूबा हुआ है जिनके घनत्व ρ तथा σ है तथा जिसकी ऊपरी भुजा मुक्त पृष्ठ में स्थित है। ρ घनत्व वाले ऊपरी द्रव की गहराई b ($b < a$) है। वर्ग

6 / B. A. / B. Sc. (Final) MATHEMATICS, 2013

पर प्रणोद ज्ञात कीजिए । A square of side a is dipped vertically in two liquids of densities ρ and σ with the upper side in the free surface. The depth of the upper liquid of density ρ is $b (< a)$. Find the thrust on the square.

इकाई IV. 7. (अ) सिद्ध कीजिए कि द्रव में डूबे हुए समतल पृष्ठ के दाब-केन्द्र की गहराई गुरुत्व-केन्द्र की गहराई से अधिक होती है । Prove that the depth of centre of pressure of a plane area immersed in a liquid is greater than the depth of centre of gravity.

(ब) एक अर्ध दीर्घवृत्ताकार पटल जो कि लघु अक्ष से परिबद्ध है, किसी द्रव में जिसका घनत्व गहराई के साथ विचरण करता है, ठीक निमज्जित है । यदि लघु अक्ष मुक्त-पृष्ठ में हो, तो उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए, ताकि दीर्घवृत्त की नाभि दाब केन्द्र हो । A semi elliptic lamina bounded by its minor axis is just immerse in a liquid, density of which varies as the depth; if the minor axis be in the surface, find the eccentricity in order that the focus may be the centre of pressure.

अथवा / OR
8. (अ) एक चतुर्भुज आकृति का पटल ABCD की भुजा CD मुक्त-पृष्ठ में है एवं भुजाएँ AD, BC ऊर्ध्वाधर तथा क्रमशः α और β लम्बाई की हैं । सिद्ध कीजिए कि इसके दाब-केन्द्र की गहराई हैं ।

A lamina in the shape of a quadrilateral ABCD has the side CD in the surface and the sides AD, BC vertical and of lengths α and β respectively. Prove that the depth of centre of pressure is

$$\frac{1}{2} \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}$$

(ब) एक खोखले बेलन को, जो कि एक समतल आधार से बन्द है, किसी द्रव से भरकर इस प्रकार रखा जाता है कि अक्ष ऊर्ध्वाधर रहे । अक्ष से होकर जाने वाली ऊर्ध्वाधर तल द्वारा काटे अर्ध बेलन पर परिणामी क्षैतिज प्रणोद ज्ञात कीजिए । A hollow cylinder closed by a plane base is filled with liquid and held with its axis vertical. Find the resultant horizontal thrust on half the cylinder cut-off by a vertical plane thorough the axis.

इकाई V. 9. (अ) द्रव में स्वतन्त्र रूप से तैरते एक पिण्ड के सन्तुलन के प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए । Find the conditions of equilibrium of a body freely floating in a liquid.

(ब) दो पिण्डों में से प्रत्येक को विभिन्न घनत्वों के तीन समांगी द्रवों में बारी-बारी से तौला गया है । यदि एक के भार क्रमशः W'_1, W'_2 , और W'_3 हैं और दूसरे के क्रमशः W''_1, W''_2 , और W''_3 हैं तो सिद्ध करो कि : Two solids are each weighed in succession in three homogenous liquids of different densities. If the weights of the one are W'_1, W'_2 , and W'_3 and those of the other are W''_1, W''_2 , and W''_3 . Prove that

$$W'_1(W''_2 - W''_3) + W'_2(W''_3 - W''_1) + W'_3(W''_1 - W''_2) = 0 \quad \text{अथवा / OR}$$

10. (अ) एक लम्बवृत्तीय बेलन, जिसका विशिष्ट घनत्व σ है, जल में इस प्रकार तैरता है कि इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा एक तिहाई जल से बाहर है । यदि वायु का विशिष्ट घनत्व ρ है तो सिद्ध करो कि $3\sigma = 2 + \rho$.

A right circular cylinder of sp. gr. σ floats in water with its axis vertical one third being above the water. If ρ be the sp. gr. of air, prove that $3\sigma = 2 + \rho$.

(ब) एक ठोस शंकु, जिसका अर्धशीर्ष कोण α , ऊँचाई h और विशिष्ट घनत्व σ है, एक द्रव में जिसका विशिष्ट घनत्व ρ है, इस प्रकार सन्तुलन से तैर रहा है कि उसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है व शीर्ष नीचे है स्थायी सन्तुलन के लिए सिद्ध करो कि A solid cone of semi vertical angle α , height h and sp. gr. σ floats in equilibrium in the liquid of sp. gr. ρ , with its axis vertical and vertex downwards. For stable equilibrium, prove that $\frac{\rho}{\sigma} > \cos^3 \alpha$