State and prove Convolution theorem.

## Mechanics-II (Dynamics of Rigid Bodies and Hydrostatics)

**T. 3 H.** **Third Paper** **M. M. 75**

**भाग–अ** 1. परिभ्रमण त्रिज्या की परिभाषा लिखिए। Define Radius of Gyration.

2. डी अलेम्बर्ट का सिद्धांत लिखिए। Write D'Alembert's principle.

3. पिण्ड लोलक के लिए आलम्बन केन्द्र परिभाषित कीजिए।

Define centre of suspension for the compound Pendulum.

4. द्विविम गतिशील पिण्ड की गति के समीकरण लिखिए।

Write the equations of motion of a body moving in two dimension.

questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

5. विशिष्ट घनत्व को परिभाषित कीजिए। Define specific gravity.

6. एक समांगी द्रव में निमज्जित एक समतलीय पृष्ठ पर संपूर्ण दाब का व्यंजक लिखिए।

Write the expression for the whole pressure on a plane surface immersed in a homogeneous liquid.

7. दाब केन्द्र की परिभाषा लिखिए। Define centre of pressure.

8. वक्र पृष्ठ पर परिणामी क्षैतिज प्रणोद परिभाषित कीजिए।

Define the resultant horizontal thrust on curved surface.

9. द्रव में स्वतंत्र रूप से तैरते एक पिण्ड पर संतुलन के प्रतिबंध लिखिए।

Write the conditions of equilibrium of a floating body in a liquid.

10. तैरते पिण्ड का आप्लव केन्द्र परिभाषित कीजिए।

Define meta-centre of a floating body.

**भाग (ब) इकाई – I.** 11.(अ) सिद्ध कीजिए कि M द्रव्यमान तथा a व b अर्धाक्षों वाले एक दीर्घवृतीय क्षेत्रफल का 2.r लम्बाई के व्यास के परित जड़त्व आघूर्ण $\frac{1}{4}M\frac{a^2b^2}{r^2}$ होता है।

Prove that the M.I. of an elliptic area of mass M and semi-axes a and b about a diameter of length 2.r is $\frac{1}{4}M\frac{a^2b^2}{r^2}$

**अथवा / OR**

(ब) 2a लम्बाई की एक समान छड़ OA, अपने एक सिरे O के परितः स्वतन्त्रतापूर्वक घूम सकती है। यदि छड़ O से गुजरने वाले उर्ध्वाधर OZ के परित एक समान कोणीय वेग W से घूमती है तथा OZ के साथ एक अचर कोण $\alpha$ बनाती है तो प्रदर्शित कीजिए कि कोण $\alpha$ या तो शून्य है या $\cos^{-1}(3g/4\,aw^2)$.

A uniform rod OA of length 2a, free to turn about its end O, revolves with uniform angular velocity w about a vertical OZ through O, and is inclined at a constant angle $\alpha$ to OZ. Show that the value of $\alpha$ is either zero or $\cos^{-1}(3g/4\,aw^2)$.

**इकाई – II.** 12.(अ) एक ठोस एकसमान शंकु जिसकी ऊँचाई h तथा ऊर्ध्वाधर शीर्षकोण $2\alpha$ है, अपने शीर्ष से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष दोलन करता है। सिद्ध कीजिए कि तुल्य सरल लोलक की लम्बाई $\frac{1}{5}h(4+\tan^2\alpha)$ है।

A solid homogeneous cone of height h and vertical angle $2\alpha$ oscillates about a horizontal axis through its vertex. Show that the length of the simple equivalent pendulum is $\frac{1}{5}h(4+\tan^2\alpha)$.

**अथवा / OR**

(ब) m संहति के दो समान बेलन एक m प्रत्यास्थ डोरी से परस्पर बंधे हैं जिसमें तनाव T है तथा $\alpha$ झुकाव वाले नत वक्र पर लुढ़कते हैं, उनके अक्ष क्षैतिज रहते हैं। यदि बेलन के मध्य घर्षण गुणांक $\mu$ है, तो प्रदर्शित कीजिए कि उनका त्वरण $\frac{2}{3}g\sin\alpha\left[1-\frac{2\mu T}{mg\sin\alpha}\right]$ है।

Two equal cylinders each of mass m are bound together by an elastic string whose tension is T and roll with their axes horizontal down a rough plane of inclination $\alpha$. If $\mu$ is the coefficient of friction between the cylinders, show that their acceleration is $\frac{2}{3}g\sin\alpha\left[1-\frac{2\mu T}{mg\sin\alpha}\right]$

questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

**इकाई – III.** 13.(अ) एक छोटी समरूप नली एक वृताकार आकृति में मोड़ दी गई है जिसका समतल ऊर्ध्वाधर है । $\rho$ तथा $\sigma$ घनत्व के समान आयतन वाले दो द्रवों से आधी नली भरी हुई है । सिद्ध कीजिए कि उभयनिष्ठ तल से जाने वाली त्रिज्या ऊर्ध्वाधर से $\theta$ कोण बनाती है जहाँ $\tan\theta = \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma}$.

A small uniform tube is bent into the form of a circle whose plane is vertical. Equal volumes of two liquids of densities $\rho$ and $\sigma$ fill half the tube. Show that the radius passing through the common surface makes with the vertical an angle $\theta$ given by $\tan\theta = \frac{\rho-\sigma}{\rho+\sigma}$.

**अथवा / OR**

(ब) एक समतलीय आधार के खोखले भारहीन गोलार्ध को जल से भरकर एक डोरी द्वारा, जिसका एक सिरा उसके आधार की नेमि के एक बिन्दु से जुड़ा है, लटकाया गया है । सिद्ध कीजिए कि वक्र पृष्ठ और समतलीय आधार पर संपूर्ण दाब 19 : 8 के अनुपात में है ।

A hollow weightless hemisphere with a planes base is filled with water and hung up by means of a string, one end of which is attached to a point of the rim of its base. Prove that the whole pressure on the curved surface and on the base are in the ratio 19 : 8.

**इकाई – IV.** 14.(अ) किसी आयत ABCD का दाब केन्द्र P है, जिसकी एक भुजा AB मुक्त पृष्ठ में है । सिद्ध करो कि A और P से होकर जाने वाली रेखा क्षेत्र को ऐसे दो भागों में विभाजित करती है जिन पर प्रणोद बराबर है । P is the C.P. of the rectangle ABCD, the side AB being in the surface. Prove the line through A and P divides the area in two portions, the pressures on which are equal.

**अथवा / OR**

(ब) एक आधार से बंद, लम्बवृतीय शंकु इस प्रकार रखा गया कि उसका अक्ष क्षैतिज है । यदि यह जल से पूर्ण भरा है तो वक्र पृष्ठ के नीचे के अर्धभाग पर परिणामी ऊर्ध्वाधर प्रणोद ज्ञात कीजिए ।

A hollow cone filled with water and closed, is held with its axis horizontal. Find the resultant vertical pressure on the lower half of its curved surface.

**इकाई – V.** 15.(अ) कोई पिण्ड किसी विशिष्ट घनत्व $\rho$ के द्रव में इस प्रकार तैरता है कि उसका उतना ही आयतन द्रव के बाहर है जितना कि यदि वह विशिष्ट घनत्व $\sigma$ के द्रव में तैरे, तो अन्दर रहता । पिण्ड का विशिष्ट घनत्व ज्ञात करो ।

A body floats in a fluid of specific gravity $\rho$ with as much of its volume out of the fluid as would be immersed in a second fluid of specific gravity $\sigma$, if it floated in that fluid. Find the sp. gr. of the body.

**अथवा / OR**

(ब) एक ही आधार पर स्थित एक गोलार्ध तथा एक समशंकु को जोड़कर बनाया हुआ ठोस पिण्ड इस प्रकार तैर रहा है कि गोलाकार भाग अंशतः डूबा रहे । सिद्ध करो कि स्थायित्व के अविरोधी शंकु की अधिकतम ऊँचाई आधार के त्रिज्या की $\sqrt{3}$ गुनी है ।

A solid body consists of a right cone joined to hemisphere on the same base and floats with the spherical portion partly immersed. Prove that the greatest height of the cone consistent with stability is $\sqrt{3}$ times the radius of the base.

**भाग–स** 16. (अ) द्विपाशी $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ के अर्ध-लूप का इसकी अक्ष एवं इसके तल में, ध्रुव से

questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

गुजरने वाली इसकी अक्ष के लम्बवत् अक्ष के परित जड़त्व गुणनफल ज्ञात कीजिए ।

Find the P.I. of a half loop of the Lemniscate $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ about its axis and a line through the pole in its plane perpendicular to its axis.

(ब) एक a त्रिज्या वाली एकसमान ऊर्ध्वाधर वृताकार चकती, अपने केन्द्र से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के परित घूर्णन कर सकती है । चकती के द्रव्यमान के बराबर द्रव्यमान तथा इसकी परिधि के बराबर लम्बाई की एक पूर्ण लचीली रूक्ष जंजीर चकती की परिधि पर लटकी हुई संतुलित है । यदि जंजीर के एक सिरे को धीरे से सरकाया जाये तो प्रदर्शित कीजिए कि जब इसका सिरा चकती तक पहुँचता है तब इसका वेग $\sqrt{(\pi a g/6)}$ होगा ।

A uniform vertical circular plate of radius a, is capable of revolving about a smooth horizontal axis through its centre. A rough perfectly flexible chain, whose mass is equal to that of the plate and whose length is equal to its circumference hangs over its rim in equilibrium. If one end be slightly displaced, show that the velocity of the chain when the other end reaches the plate is $\sqrt{(\pi a g/6)}$.

17. (अ) एक मुड़ा हुआ लीवर, जिसकी भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः a तथा b है और इनके मध्य कोण $\alpha$ हैं, अपने तल में अपने आलम्ब के सापेक्ष लघु दोलन करता है । प्रदर्शित कीजिए कि संगत सरल लोलक की लम्बाई $\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos\alpha+b^4}}$ है ।

A bent lever, whose arms are of lengths a and b and angle between them is $\alpha$, makes small oscillation in its own plane about the fulcrum. Show that the length of the corresponding simple pendulum is :

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{a^3+b^3}{\sqrt{a^4+2a^2b^2\cos\alpha+b^4}}$$

(ब) एक समान छड़ का एक सिरा क्षैतिज मेज के संपर्क में है तथा यह झुकाव कोण $\alpha$ पर रोकी हुई है, घर्षण गुणांक $\mu$ है । यदि इसे छोड़ दिया जाये तो सिद्ध कीजिए कि यह सरकना प्रारम्भ करेगी यदि $\mu < \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$.

A uniform rod is held at an inclination $\alpha$ to the horizon with one-end in contact with a horizontal table whose coefficient of friction is $\mu$. If it be then released, show that it will commence to slide if $\mu < \frac{3\sin\alpha\cos\alpha}{1+3\sin^2\alpha}$.

18. (अ) तीन द्रव जिनके घनत्व स.श्रे. में हैं, एक अर्धवृताकार नली में भरे गये हैं जिसका सीमक व्यास क्षैतिज है । सिद्ध कीजिए कि द्रवों के उभयनिष्ठ तलों में एक की गहराई दूसरे की गहराई से दुगुनी है । Three liquids whose densities are in A.P., fill a semicircular tube whose bounding diameter is horizontal. Prove that the depth of one of the common surface is double that of the other.

(ब) एक खोखला भारहीन शंकु, जिसका अर्धशीर्ष कोण $\alpha$ तथा ऊँचाई h है, द्रव से भरा है तथा आधार की नेमि के एक बिन्दु से निर्बाध लटका है । सिद्ध कीजिए कि आधार पर द्रव का प्रणोद $\frac{4\pi h^3\tan^3\alpha.\sin\alpha.\omega}{\sqrt{1+15\sin^2\alpha}}$ है ।

A hollow weightless cone of semivertical angle $\alpha$ and of height h is filled

questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner

with liquid and freely hung from a point on the rim of the base. Show that the thrust of the liquid on the base is $\frac{4\pi h^3 \tan^3\alpha . \sin\alpha . \omega}{\sqrt{1+15\sin^2\alpha}}$.

19. (अ) एक वृत पाद किसी भारी समांगी द्रव में ठीक इस प्रकार डूबा है कि उसका तल ऊर्ध्वाधर और एक कोर मुक्त पृष्ठ में है। दाब केन्द्र का निर्देशांक ज्ञात करो।

A quadrant of a circle is just immersed vertically in a homogeneous liquid with one edge in the surface. Find the centre of pressure.

(ब) एक जल से भरे बेलनाकार पात्र को एक कोने से इस प्रकार लटकाया है कि इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर से 45° का कोण बनाता है। इसके सिरों पर प्रणोद के परिमाण ज्ञात करो और दिखाओ कि वक्र पृष्ठ पर परिणामी प्रणोद सिरों पर प्रणोदों के अन्तर के बराबर होगा।

A cylindrical vessel, full of water, is hung from a corner with its axis inclined at an angle 45° to the vertical. Find the magnitude of the pressure on the ends and show that the resultant pressure on the curved surface will be equal to the difference between the pressure on the ends.

20. (अ) एक जहाज समुद्र से नदी में प्रवेश करते समय जल की सतह से a इंच नीचे धंस जाता है परन्तु अपने भार का x टन उतारने पर सतह से ऊपर b इंच चढ़ जाता है। यदि समुद्री जल नदी के जल से (1/40) गुना भारी हो तो सिद्ध करो कि जहाज का भार $41.\frac{a.x}{b}$ टन है।

A ship sailing from the sea into a river sinks a inches and discharging x tons of cargo rises b inches. If sea water be (1/40) times heavier than river water, prove that the weight of the ship is $41.\frac{a.x}{b}$ tons.

(ब) यदि एक लम्ब वृतीय ठोस बेलन, जिसकी त्रिज्या a और ऊँचाई h है, किसी द्रव में इस प्रकार तैर रहा है कि उसका अक्ष ऊर्ध्वाधर रहे, तो सिद्ध करो कि संतुलन स्थायी होगा जबकि $2a^2 > h^2$, चाहे विशिष्ट घनत्व कुछ भी हो।

Show that in the case of a right circular cylinder of radius a and height h, floating with its axis vertical in any liquid, the equilibrium will be stable, whatever be the specific gravity, if $2a^2 > h^2$.

questionpaperesult.com

Scanned by CamScanner